



**INFERENCIA BAYESIANA PARA LA ESPERANZA DE LA TASA DE
LETALIDAD ACUMULADA DIARIA POR COVID-19 A NIVEL MUNDIAL
PARA EL PERIODO DE ENERO DE 2020 A MARZO DE 2021**

José Gabriel Villamizar Lara

Universidad El Bosque
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá DC, Colombia

2021

**INFERENCIA BAYESIANA PARA LA ESPERANZA DE LA TASA DE
LETALIDAD ACUMULADA DIARIA POR COVID-19 A NIVEL MUNDIAL
PARA EL PERIODO DE ENERO DE 2020 A MARZO DE 2021**

José Gabriel Villamizar Lara

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título en Estadística

Director:

Mario José Pacheco López

MSc

Universidad El Bosque
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas
Bogotá DC, Colombia

2021

Resumen

La pandemia del COVID-19 causó estragos en los sistemas de salud a nivel mundial. Durante el periodo de estudio (Enero 2020-Marzo 2021), se confirmaron más de dos millones de defunciones y más de cien millones de contagiados debido a la enfermedad (OPS, 2021). Se buscó cuantificar la gravedad de la pandemia a nivel mundial estimando una tasa de letalidad media acumulada diaria global, haciendo uso de estadística bayesiana. Se realizó una estimación puntual por medio de la de la mediana posterior y se construyeron intervalos de credibilidad del 89%. Se usó la regla de Jeffrey como información a priori y la distribución beta reparametrizada por Ferrari & Cribari-Neto (2004), fue la distribución probabilidad asumida para los datos. Se encontró que la mediana posterior tuvo su máximo valor el primer día, con un valor del 42% aproximadamente, este fue decayendo de manera acelerada hasta llegar a los 300 días, donde la tasa tiene un valor estable aproximado del 2% el cual se encuentra dentro de un intervalo de credibilidad del 1% al 3%, además se comparo la tasa letalidad observada de diversos países en vías de desarrollo y ya desarrollados, con la mediana posterior, donde se vio que los países desarrollados tuvieron los valores más altos en comparación a los países en vías de desarrollo.

Palabras claves: Inferencia bayesiana, COVID-19, Tasa de letalidad, Distribución Beta

Abstract

The COVID-19 pandemic wreaked havoc on global health systems. During the study period (January 2020-March 2021), more than two million deaths and more than one hundred million infections due to the disease were confirmed (PAHO, 2021). We sought to quantify the severity of the pandemic worldwide by estimating a global average daily accumulated lethality rate, using Bayesian statistics. A point estimate was made by means of the subsequent median and credibility intervals of 89% were constructed. Jeffrey's rule was used as a priori information and the beta distribution repaired by Ferrari & Cribari-Neto (2004), was the probability distribution assumed for the data. It was found that the later median had its maximum value on the first day, with a value of 42% approximately, this was declining rapidly until reaching 300 days, where the rate has a stable value of approximately 2% which is within a credibility interval of 1% to 3%, in addition the observed lethality rate of various developing and already developed countries is compared with the subsequent median, where it was seen that developed countries had the highest values compared to developing countries.

Keywords: Bayesian inference, COVID-19, Lethality rate, Beta distribution

Índice general

Resumen	I
Abstract	II
1. Marco Referencial	4
1.1. Marco Teórico	4
1.1.1. La COVID-19	4
1.1.2. Coronavirus	4
1.1.3. Tasa de letalidad	5
1.1.4. Estadística Bayesiana	5
1.1.5. Probabilidad a priori	5
1.1.6. Probabilidad a priori no informativa	6
1.1.7. Distribución a priori de Jeffrey	6
1.1.8. Probabilidad a Posteriori	6
1.1.9. Distribución Beta clásica y reparametrizada	6
1.1.10. Estimación puntual	8
1.1.11. Estimación por intervalos	8
1.1.12. Intervalo de Credibilidad	8
1.2. Estado del Arte	9
2. Metodología	12
3. Estimación de la tasa de letalidad	14

3.1. Modelo	14
3.1.1. Distribución beta clásica	14
3.1.2. Distribución a priori	14
3.1.3. Distribución posterior	17
3.1.4. Distribución de $E(x)$	17
3.1.5. Aproximación usando la distribución Beta reparametrizada	19
3.1.6. Distribución a priori	19
3.1.7. Distribución posterior	23
3.2. Estimación de Parámetros	24
3.3. Estimación de tasa de letalidad media global y los intervalos de credibilidad	25
3.4. Análisis de Resultados	25
4. Conclusiones	30
5. Anexos	31
6. Bibliografía	44

Índice de cuadros

3.4.1. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad para los primeros 10 días	26
5.0.1. Países eliminados del estudio	33
5.0.2. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día	34
5.0.3. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	35
5.0.4. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	36
5.0.5. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	37
5.0.6. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	38
5.0.7. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	39
5.0.8. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	40
5.0.9. Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	41
5.0.10 Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación) . .	42
5.0.11 Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día	43

Índice de figuras

3.4.1. <i>Mediana posterior durante 365 días</i>	27
3.4.2. <i>Países Desarrollados</i>	28
3.4.3. <i>Países en vías de desarrollados</i>	28
5.0.1. <i>Tasa de letalidad mediana primeros 50 días</i>	31
5.0.2. <i>Tasa de letalidad mediana desde el día 51 al 100</i>	32
5.0.3. <i>Tasa de letalidad mediana después de 101 días</i>	32

Introducción

El 11 marzo del año 2020 la OMS declara a la COVID-19, enfermedad causada por el virus SARS CoV-2, como una pandemia debido a su gravedad y rápida expansión a nivel mundial. Este patógeno originario de China ha afectado a más de 192 países y aunque a finales del mismo año se encontró un proceso farmacéutico para la inmunidad individual, el daño ocasionado por la enfermedad ha sido considerable en los sistemas de salud pública nacionales, debido al desconocimiento de su funcionamiento al inicio de esta. La pandemia ha evolucionado de manera heterogénea a nivel mundial, las cifras sobre los contagios diarios, muertes y recuperados son parecidas en términos de proporción; sin embargo, se evidencian diferencias entre países y los departamentos que componen a los mismos, debido a que cada nación tiene sus directrices en los sistemas de salud pública.

Una de las formas de cuantificar la gravedad de una enfermedad es mediante el uso de tasas epidemiológicas, debido a que estas pueden explicar la evolución de un suceso en un periodo de tiempo. Las más comunes son: la de mortalidad, de letalidad y de incidencia (Moreno et al., 2015). Para el caso de la COVID-19 se han usado las tres tasas, cada una aporta información de gran utilidad, la tasa de letalidad es de mayor interés de estudio, puesto que a diferencia de la tasa de mortalidad, esta solo toma en consideración a las personas que han padecido la enfermedad, no la población en riesgo.

Este estudio tuvo como objetivo estimar la tasa de letalidad media acumulada diaria mundial para un periodo de 365 días (Enero 2020-Marzo 2021, se cuentan los días desde el primer caso de contagiado por COVID-19 es reportado por el país) y crear sus respectivos intervalos de credibilidad al 89% (McElreath, 2018), para los países que con tasas de letalidad mayores a cero. Para esto se hará uso de la inferencia bayesiana y la distribución Beta reparametrizada

Justificación

La pandemia de la COVID-19 ha sido una catástrofe a nivel internacional ya que desequilibró la economía global y los sistemas de salud pública nacionales (Benjamin, 2020), debido a esto, investigadores a nivel mundial empezaron a estudiar el nuevo virus, las medidas de gravedad fueron los principales indicadores del estado de la pandemia en todo momento (Lash et al., 2021). La tasa de letalidad al inicio de la enfermedad en cada país era alta, ya que había problemas de identificación de casos y fallecidos, aunado a las dificultades para el control del patógeno, pero a medida que el tiempo transcurría la tasa empezó a estabilizarse a un valor cercano al 3% a nivel mundial (Hasan et al., 2021).

El uso de inferencia bayesina permite una mejor estimación de la tasa de letalidad por sus propiedades, ya que al tener una información a posteriori buena, la necesidad de grandes volúmenes de datos es solventada y la calidad de las estimaciones es comparable con la de los métodos clásicos. "Un modelo de mezcla bayesiano fue capaz de predecir con mayor precisión la forma de la mortalidad curvas a través de los Estados Unidos que otros modelos" (Kaciroti et al., 2021). El uso de la distribución Beta reparametrizada permite una mejor estimación de la media debido a las propiedades y bondades de la misma, "el parámetro de estimación de la tasa de letalidad se realiza mediante el uso de la distribución beta previa, y los resultados tienen un buen rendimiento con un alto grado de precisión." (Deviant et al., 2021). Y ha diferencia de muchos otros trabajos al ser un estudio global es posible comparar la gravedad de la pandemia en distintos países y obtener una medida de comparación general, como lo es la mediana.

Objetivos

Objetivo General

Estimar la tasa de letalidad media acumulada diaria global por COVID-19 desde una perspectiva bayesiana.

Objetivos específicos

1. Depurar las bases de datos de casos reportados y número de muertes diarias acumuladas por países, registradas en el repositorio de la Universidad de Johns Hopkins.
2. Ajustar la distribución beta clásica y la reparametrización propuesta por Ferrari & Cribari-Neto (2004) para la tasa de letalidad diaria acumulada global por COVID-19.
3. Estimar la tasa de letalidad media acumulada diaria global mediante la inferencia puntual bayesiana.
4. Estimar los intervalos de credibilidad para la tasa de letalidad media diaria acumulada global por COVID-19 .
5. Desarrollar un algoritmo en el software estadístico R que permita estimar de manera puntual y mediante intervalos de credibilidad la tasa de letalidad media diaria acumulada.

Capítulo 1

Marco Referencial

1.1. Marco Teórico

En este capítulo se detallan los conceptos necesarios para el desarrollo del trabajo investigativo, en cuanto a las definiciones y los antecedentes relacionados con el tema de investigación.

1.1.1. La COVID-19

La Organización Mundial de la Salud (2020) define a la COVID-19 como una enfermedad infecciosa causada por la familia coronavirus que fue descubierta a finales del año 2019 en Wuhan (China). Actualmente la COVID-19 fue declarada pandemia.

1.1.2. Coronavirus

La Organización Mundial de la Salud (2020) define al coronavirus como:

... son una extensa familia de virus, algunos de los cuales puede ser causa de diversas enfermedades humanas, que van desde el resfriado común hasta el SRAS (síndrome respiratorio agudo severo). Los virus de esta

familia también pueden causar varias enfermedades en los animales. El nuevo coronavirus es una cepa particular de coronavirus que no había sido identificada previamente en humanos. (párr. 3)

1.1.3. Tasa de letalidad

Es “una medida de la gravedad de una enfermedad y se define como la proporción de casos de una enfermedad o evento determinado que resultan mortales en un periodo especificado.” (Beaglehole et al., 1994)

$$\text{Letalidad} = \frac{\text{Número de muertes por una enfermedad en un tiempo determinado}}{\text{Número de casos diagnosticados de la enfermedad en el mismo periodo}}$$

1.1.4. Estadística Bayesiana

Recibe el nombre de la persona que introdujo el teorema de Bayes, Thomas Bayes. “La diferencia fundamental entre el enfoque bayesiano y el clásico o frecuente es que en los conceptos bayesianos los parámetros se consideran variables aleatorias.”(Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers & Ye, 2012).

1.1.5. Probabilidad a priori

Castellano (2015) afirma que:

La estadística Bayesiana se basa en la interpretación subjetiva de la probabilidad. Para ello utiliza la percepción existente, por parte del investigador, como una variable modificadora (distribución a priori) de los datos muestrales, que dan lugar a una distribución (distribución a posteriori) con la que formular inferencias con respecto al parámetro de interés.

1.1.6. Probabilidad a priori no informativa

Como lo menciona Gelman et al.(2013) una distribución no informativa es:

Cuando las distribuciones anteriores no tienen base poblacional, pueden ser difíciles de construir, y hace tiempo que hay un deseo de distribuciones previas que se puede garantizar para jugar un mínimo papel en la distribución posterior. Tales distribuciones se denominan a veces y la densidad anterior se describe como vaga, plana, difusa o no informativa

1.1.7. Distribución a priori de Jeffrey

"...el principio de Jeffreys lleva a definir la densidad anterior no informativa como $p(\theta) \propto |J(\theta)|^{1/2}$, donde $J(\theta)$ es la información de Fisher para θ "(Gelman et al.,2013), la información de Fisher se define como:

$$J(\theta) = -E\left(\frac{d^2 \log(f(y|\theta))}{d\theta^2}\right)$$

1.1.8. Probabilidad a Posteriori

La probabilidad a posteriori es el resultado de multiplicar la probabilidad a priori o subjetiva por el valor obtenido de la función de verosimilitud de los datos, el producto de lo anterior dicho debe ser dividido por la probabilidad de los datos observados, obteniendo de esta manera la fórmula del teorema de Bayes (Castellano, 2015)

1.1.9. Distribución Beta clásica y reparametrizada

Es una distribución continua en la cual la variable aleatoria X toma valores desde cero a uno, se dice X sigue una distribución beta con los parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$, si su

función de densidad es dada por la siguiente forma (Meek et al., 1987):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función Beta esta definida de la siguiente manera:

$$\beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$

La función Gamma esta definida de la siguiente manera:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} s^{x-1} e^{-s} ds$$

Donde x es un número real positivo.

Ferrari & Cribari-Neto (2004) platearon una reparametrización de la distribución beta. Su modelo resulta eficaz en situaciones donde la variable de interés se encuentra en el intervalo de valores (0,1) y se relaciona con otras variables a través de una estructura de regresión. La nueva distribución beta tiene los siguientes parámetros:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \text{ y } \phi = \alpha + \beta$$

Donde $\alpha = \mu\phi$ y $\beta = (1 - \mu)\phi$, por lo cual $E(X) = \mu$. Su función de densidad viene dada de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta(\mu\phi, (1-\mu)\phi)} x^{\mu\phi-1} (1-x)^{(1-\mu)\phi-1} & , \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

1.1.10. Estimación puntual

Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers & Ye(2012) define: "La estimación puntual de algún parámetro de la población θ es un solo valor $\hat{\theta}$ de un estadístico Θ . No se espera que un estimador logre estimar el parámetro de la población sin error."

1.1.11. Estimación por intervalos

Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers & Ye(2012) en su libro define una estimación por intervalos como:

...la exactitud de la estimación aumenta cuando las muestras son grandes; pero incluso así no tenemos razones para esperar que una estimación puntual de una muestra dada sea exactamente igual al parámetro de la población que se supone debe estimar. Hay muchas situaciones en que es preferible determinar un intervalo dentro del cual esperaríamos encontrar el valor del parámetro. Tal intervalo se conoce como estimación por intervalo.

1.1.12. Intervalo de Credibilidad

Para Meek et al. (1987) estable que "en el contexto de Bayes, el parámetro θ es una variable aleatoria con función de densidad posterior $g^*(\theta)$. Si consideramos el intervalo (a, b) , la probabilidad posterior de que la variable aleatoria θ se encuentre en este intervalo es":

$$P^*(a < \theta < b) = \int_a^b g^*(\theta) d\theta$$

"Si la probabilidad posterior $P^*(a < \theta < b) = 0.89$, decimos que (a, b) es un intervalo creíble de 89% para θ ."

1.2. Estado del Arte

La emergencia sanitaria de la COVID-19 amenaza los sistemas de salud pública y económicos de manera global, por eso se necesitó de una rápida respuesta por parte de los entes gubernamentales y científicos para empezar las investigaciones del nuevo virus, de este tema se pondrán encontrar muchos artículos e investigaciones a nivel internacional. La estadística bayesiana se ha aplicado al campo de las ciencias médicas desde los años noventa, debido a su complejidad numérica y computacional su uso ha sido poco pero no nulo, y se han obtenido resultados satisfactorios de las mismas (MacLehose & Hamra, 2014). Para este trabajo se realizó una búsqueda literaria en distintas bases de datos de diversos países, los más importantes fueron los siguientes:

Medeiros de Figueiredo et al.(2020), aplicó un diseño ecológico en las comunidades autónomas españolas para abril del año 2020, con el fin de encontrar si existían diferencias significativas para la tasa de incidencia y mortalidad entre las mismas, este artículo “Factores asociados a la incidencia y la mortalidad por COVID-19 en las comunidades autónomas”, encontró que la temperatura puede ser un factor de riesgo, ya que en la comunidades con temperaturas elevadas o muy bajas se encontró una menor incidencia, además se reafirma que el grupo etario de 80-90 años es el grupo con mayor tasa de letalidad entre comunidades. Dicho esto, esperaríamos que para los países con temperaturas muy bajas o altas la tasa media de letalidad de la Covid sea inferior a los demás países.

Medeiros Figueiredo et al. (2020), en su artículo anterior reseñado Medeiros y Cia, hicieron su estudio ecológico a nivel nacional en España, en “Letalidad de la COVID-19: ausencia de patrón epidemiológico” el autor uso como muestra países que tuvieran más de 200 casos de COVID-19 confirmado para realizar una regresión lineal simple, donde las principales medidas de gravedad (incidencia, mortalidad y letalidad) serían la variable respuesta, y las explicativas serían variables del tipo demográficas, con el fin de encontrar relación entre las mismas. Se encontró que el COVID-19 no tenía los patrones que son de esperar en una epidemia de este tipo, que contagia de manera sencilla y rápida, esto aunado a difícil detección, genera que esta epidemia sea diferente a las anteriores, por lo cual recomienda aumentar el número de pruebas que permitan identificar los casos

positivos y poder tratarlos y aislarlos de manera eficaz.

Martín-Sánchez et al.(2020), las comunidades autónomas españolas son de gran ayuda para los estudios epidemiológicos ya que se tiene una población homogénea por comunidad que al tiempo es heterogénea entre las mismas, en este caso el objetivo del artículo es ver como la tasa de letalidad puede variar en España, “Análisis de las tasas de letalidad de la infección por SARS-CoV-2 en las comunidades autónomas de España”, encontró que la tasa de letalidad es muy variante dependiendo de la comunidad, solo hubo tres comunidades donde la tasa fue alta en comparación. Esto nos hace pensar que la tasa puede variar mucho entre países.

Colombia ha sido de los países más afectados por la reciente pandemia, siendo el tercero con más contagios y fallecidos de la región por la COVID-19 en la región latinoamericana. Díaz (2020), en su estudio, calculan dos medidas de gravedad que son: la tasa de mortalidad y letalidad a nivel nacional y estatal, las cuales permiten observar que las zonas más afectadas son las regiones con mayor población, pero las que tienen una densidad poblacional menor igual tiene valores que no se pueden ignorar.

Martins-Filho et al.(2021) realizo un estudio de la letalidad de la COVID-19 en el periodo de Abril a Junio del 2020, en el cual estratifico la muestra de 605 muertes en Brasil, por genero y edad, en el cual encontró que la tasa de letalidad oscila entre un 1 % y 16 %, dependiendo de las características del individuo, para el calculo de la tasa de letalidad uso un tiempo de muerte de 14 días.

Manrique-Abril et al.(2020) en Colombia se han realizado estudios sobre la tasa de letalidad global de la COVID-19, en este caso fue un modelo que buscaba de explicar que determinantes sociales en salud se asocian con la medida de gravedad, este documento fue hecho el año pasado y tuvo en consideración 67 países. Desarrollaron un modelo lineal generalizado mixto con distribución beta reparametrizada con interceptación aleatoria, se usaron 22 variables explicativas, las mas significativas para el modelo fueron las siguientes: porcentaje de personas mayores de 60 años en el país, inversión en salud como porcentaje del PIB y la proporción de sexos del país. Para la fecha del 3 de junio, se destaca la alta tasa de letalidad en países desarrollados como Bélgica, Francia, México, Inglaterra, Italia, Hungría, Holanda y Suecia, al igual que los valores bajos en Rusia,

Australia, Nueva Zelanda, Malasia, Chile e Israel.

Etzioni & Kadane (1995), en su estudio “Métodos bayesianos aplicados a medicina y salud pública” muestran que la estadística bayesiana al igual que la clásica son de gran utilidad en el campo médico, mostrando ejemplos en varios casos de estudio clínico como la progresión del sida y el cáncer de mama. Además, muestran que esta rama de la estadística es de gran utilidad ya que presenta una gran flexibilidad para el seguimiento en los casos de ensayo clínico secuencial.

La estimación de la tasa de letalidad de la COVID-19 se ha realizado en muchos países, como es el caso de Indonesia, país donde Kaciroti et al.(2021) realizó una estimación de la tasa de letalidad de la COVID-19 en las distintas regiones de Indonesia mediante inferencia bayesiana, se realizó una estimación puntual de la media y fue usada la distribución beta como información a priori, como resultado se encontró que los modelos bayesianos en comparación a los modelos de regresión clásica dan mejores RMSE e intervalos más anchos, además el uso de la distribución beta fue acertado ya que los resultados tuvieron un buen rendimiento.

Capítulo 2

Metodología

Este estudio está fundamentado en la base de datos de la Universidad Johns Hopkins, en la cual se encuentra el registro de los casos de contagios y muertes diarias por la COVID-19 de todos los países registrado en la Organización de las Naciones Unidas. Los datos recolectados corresponden desde el 22 enero del año 2020 hasta el 26 de Marzo del año 2021.

Los datos fueron depurados y solo se tomaron los datos por país, se excluyeron los datos por región, para los países sudamericanos se buscaron en las entidades correspondientes las bases de datos de contagio y fallecidos nacionales. Se cambiaron los datos de la Universidad Johns Hopkins de estos países por los correspondientes emitidos por las mismas naciones. Los países que tienen una tasa de letalidad acumulada de cero fueron eliminados del estudio, en total 10 países fueron descartados (Ver Tabla 5.0.1 en Anexos).

En la base de datos de los contagios y defunciones en Argentina, se reportaron 202108 casos confirmados de la COVID-19, pero ninguna tenía fecha de diagnóstico, por lo cual se descartaron. Lo mismo ocurre con en Colombia, 4108 casos de COVID-19 fueron descartados debido a la falta del día en que se diagnostica que la persona padece la enfermedad.

El conteo de los días inicia después de que se reportó el primer individuo infectado por el virus. Para calcular la tasa de letalidad se tuvo en cuenta el tiempo desde que el

paciente es diagnosticado hasta su defunción, ya que este puede variar dependiendo del individuo infectado. Si no se toma este tiempo de muerte la tasa de letalidad puede ser más baja de lo que realmente es (Baud et al., 2020), dicho esto se tomó un tiempo de 14 días como tiempo de retardo entre el reporte y la sucesiva muerte, tiempo sugerido por Martins-Filho et al.(2021) en su trabajo donde estimo la tasa de mortalidad de la COVID-19 en el noroeste de Brasil y el anterior mencionado Baud et al.(2020), se dividió el total de fallecidos del día quince entre los infectados acumulados del primer día que se reportaron infectados, así obtenemos la tasa de letalidad del día uno, luego los difuntos acumulados para el día 16 y los infectados aculados para el día dos, y así sucesivamente. Si la tasa de letalidad diaria de algún país era mayor o igual a uno, ese día es descartado, al igual que los ceros.

$$Letalidad = \frac{\text{Número de muertes nacionales acumuladas 14 días después del diagnostico}}{\text{Número de casos acumulados nacionales diagnosticados en el día}}$$

Se agruparon los países por día, seguido se modeló la tasa de letalidad de cada día con la distribución posterior de la esperanza de la tasa de letalidad, posteriormente se aplicaron muestreadores de Metropolis-Hastings para obtener 10000 muestras de cada día, de estas muestras se obtuvo las estimaciones de la mediana mediante la búsqueda del percentil que almacena el 50% de los datos, y la estimación de los intervalos de credibilidad al 89% de confianza.

Capítulo 3

Estimación de la tasa de letalidad

3.1. Modelo

3.1.1. Distribución beta clásica

Para modelar las tasa de letalidad diaria acumulada global media, se hizo uso de la distribución beta clásica en primera instancia, debido a que no se tiene información a priori de confianza, se uso la distribución a priori de Jeffrey.

Función de densidad de la distribución Beta

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\beta, \alpha)}, \quad x \in (0, 1), \quad \beta > 0 \text{ y } \alpha > 0$$

3.1.2. Distribución a priori

Obtención de la distribución A Priori de Jeffrey:

$$\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\beta, \alpha)}\right) = (\alpha - 1)\ln(x) + (\beta - 1)\ln(1-x) - \ln(B(\beta, \alpha))$$

$$\ln(B(\beta, \alpha)) = \ln\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta + \alpha)}\right) = \ln(\Gamma(\alpha)) + \ln(\Gamma(\beta)) - \ln(\Gamma(\alpha + \beta))$$

Al sustituir $\ln(B(\beta, \alpha))$ en la primera ecuación y aplicar propiedades de los logaritmos tenemos:

$$\ln(B(\beta, \alpha)) = (\alpha - 1)\ln(x) + (\beta - 1)\ln(1 - x) - \ln(\Gamma(\alpha)) - \ln(\Gamma(\beta)) + \ln(\Gamma(\alpha + \beta))$$

La derivada del logaritmo de la función gamma, es la función digamma, la cual queda de la forma:

$$\ln(\Gamma(\alpha))' = \frac{\Gamma(\alpha)'}{\Gamma(\alpha)} = \psi(\alpha)$$

Las derivadas de mayor orden son las funciones polígama $\psi^{(n)}(x)$

Derivadas de α :

$$\frac{df'}{d\alpha} = \ln(x) - \psi(\alpha) + \psi(\alpha + \beta)$$

$$\frac{df''}{d\alpha} = -\psi^{(2)}(\alpha) + \psi^{(2)}(\alpha + \beta)$$

Derivadas de β :

$$\frac{df'}{d\beta} = \ln(1 - x) - \psi(\beta) + \psi(\alpha + \beta)$$

$$\frac{df''}{d\beta} = -\psi^{(2)}(\beta) + \psi^{(2)}(\alpha + \beta)$$

Luego, las derivadas cruzadas:

$$\frac{df''}{d\beta d\alpha} = \psi^{(2)}(\alpha + \beta)$$

$$\frac{df''}{d\alpha d\beta} = \psi^{(2)}(\alpha + \beta)$$

Matriz de información de Fisher

$$I(\theta) = -E \left\{ \begin{array}{cc} -\psi^{(2)}(\alpha) + \psi^{(2)}(\alpha + \beta) & \psi^{(2)}(\alpha + \beta) \\ \psi^{(2)}(\alpha + \beta) & -\psi^{(2)}(\beta) + \psi^{(2)}(\alpha + \beta) \end{array} \right\}$$

$$I(\theta) = \left\{ \begin{array}{cc} \psi^{(2)}(\alpha) - \psi^{(2)}(\alpha + \beta) & -\psi^{(2)}(\alpha + \beta) \\ -\psi^{(2)}(\alpha + \beta) & \psi^{(2)}(\beta) - \psi^{(2)}(\alpha + \beta) \end{array} \right\}$$

Asi la a priori de Jeffrey

$$\xi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2} = \left| \begin{array}{cc} \psi^{(2)}(\alpha) - \psi^{(2)}(\alpha + \beta) & -\psi^{(2)}(\alpha + \beta) \\ -\psi^{(2)}(\alpha + \beta) & \psi^{(2)}(\beta) - \psi^{(2)}(\alpha + \beta) \end{array} \right|^{1/2}$$

Se resuelve el determinante

$$\xi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2} = \left(\psi^{(2)}(\alpha)\psi^{(2)}(\beta) - \psi^{(2)}(\alpha)\psi^{(2)}(\alpha + \beta) - \psi^{(2)}(\beta)\psi^{(2)}(\alpha + \beta) + \left(\psi^{(2)}(\alpha + \beta)\right)^2 - \left(\psi^{(2)}(\alpha + \beta)\right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\xi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2} = \left(\psi^{(2)}(\alpha)\psi^{(2)}(\beta) - \psi^{(2)}(\alpha)\psi^{(2)}(\alpha + \beta) - \psi^{(2)}(\beta)\psi^{(2)}(\alpha + \beta) \right)^{1/2}$$

Función de verosimilitud de la distribución beta:

$$\begin{aligned}
 L(\alpha, \beta | x) &= \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)} = \frac{1}{(B(\alpha, \beta))^n} \prod_{i=1}^n e \left(\text{Ln} \left(x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{(B(\alpha, \beta))^n} e \left(\sum_{i=1}^n \text{Ln} \left(x_i^{\alpha-1} (1-x_i)^{\beta-1} \right) \right) \\
 &= \frac{(\Gamma(\alpha + \beta))^n}{(\Gamma(\alpha))^n (\Gamma(\beta))^n} e \left(\sum_{i=1}^n ((\alpha - 1) \ln(x_i) + (\beta - 1) \ln(1 - x_i)) \right)
 \end{aligned}$$

3.1.3. Distribución posterior

Distribución A posterior de la distribución Beta:

$$\begin{aligned}
 \xi(\alpha, \beta | x) \propto L(\alpha, \beta | x) \xi(\alpha, \beta) &= \left(\psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}(\beta) - \psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}(\alpha + \beta) - \psi^{(2)}(\beta) \psi^{(2)}(\alpha + \beta) \right)^{1/2} \\
 e \left(\sum_{i=1}^n ((\alpha - 1) \ln(x_i) + (\beta - 1) \ln(1 - x_i)) \right) &\frac{(\Gamma(\alpha + \beta))^n}{(\Gamma(\alpha))^n (\Gamma(\beta))^n}
 \end{aligned}$$

3.1.4. Distribución de $E(x)$

Para encontrar la distribución de la $E(X)$ se uso el teorema de la transformada de la función de una variable aleatoria.

Primero se transforma la $E(x)$ es una variable que llamaremos " m "

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \longrightarrow m = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Se realizo una marginalización de uno de los parámetros de la distribución beta, en este caso fue la marginal del parámetro β

$$m\alpha + m\beta = \alpha \longrightarrow m\beta = \alpha - m\alpha \longrightarrow \beta = \frac{\alpha(1 - m)}{m}$$

Derivamos la ecuación en función de m y obtenemos lo siguiente:

$$\frac{df'}{dm} \frac{\alpha(1-m)}{m} = -\frac{\alpha}{m^2} \rightarrow \left| -\frac{\alpha}{m^2} \right| = \frac{\alpha}{m^2}$$

Ahora sustituimos el parámetro β de la distribución posterior y la nueva función de probabilidad se multiplica por el valor absoluto de la derivada.

$$f_x(g(m)^{-1}) \left| \frac{df'}{dm} \right|$$

Función de probabilidad de $E(x)$:

$$\begin{aligned} \xi(m|x) &\propto \left(\psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right) - \psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. - \psi^{(2)}\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \psi^{(2)}\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \right)^{1/2} \\ &e^{\left(\sum_{i=1}^n ((\alpha-1)\ln(x_i) + \left(\frac{\alpha(1-m)}{m} - 1\right)\ln(1-x_i)) \right)} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right)^n \alpha}{\Gamma(\alpha)^n \Gamma\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right)^n m^2} \end{aligned}$$

Ahora aplicamos el logaritmo a la función de probabilidad para poder aplicar los muestreadores:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \log \left[\psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right) - \psi^{(2)}(\alpha) \psi^{(2)}\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \right. \\ &\quad \left. - \psi^{(2)}\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \psi^{(2)}\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right) \right] \\ &+ \sum_{i=1}^n \left[(\alpha-1)\ln(x_i) + \left(\frac{\alpha(1-m)}{m} - 1\right)\ln(1-x_i) \right] + n \log\left(\Gamma\left(\alpha + \frac{\alpha(1-m)}{m}\right)\right) \\ &- n \log\left(\Gamma(\alpha)\right) - n \log\left(\Gamma\left(\frac{\alpha(1-m)}{m}\right)\right) + \log(\alpha) - 2 \log(m) \end{aligned}$$

Al realizar la estimación de la tasa de letalidad acumulada media global mediante simulaciones con la distribución beta clásica se encontró que la misma requería de mucho tiempo y exigía mucha potencia computacional, debido a esto se realizó el mismo procedimiento con una reparametrización de la distribución beta, con la finalidad de

reducir la exigencia computacional.

3.1.5. Aproximación usando la distribución Beta reparametrizada

Ferrari & Cribari-Neto (2004) plantearon una reparametrización de la distribución beta para que esta pueda ser empleada en los modelos lineales generalizados, ya que la distribución beta clásica no forma parte de la familia exponencial, para la cual es necesario realizar los siguientes cambios de variables:

$$\mu = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad \phi = \alpha + \beta$$

La densidad de "x" se puede escribir, en la nueva parametrización, como

$$f(x) = \frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi\mu)\Gamma((1-\mu)\phi)} x^{\phi\mu-1} (1-x)^{(1-\mu)\phi-1}$$

$$0 < x < 1 \quad 0 < \mu < 1 \quad 0 < \phi$$

Donde $\alpha = \phi\mu$ y $\beta = (1-\mu)\phi$, al realizar esta reparametrización la esperanza de la variable aleatoria es más sencilla ya que $E(x) = \mu$, por lo cual no se realizaría transformación de la función de variable aleatoria. Procedemos a buscar la a priori de Jeffrey

3.1.6. Distribución a priori

Aplicamos el logaritmo a la función de densidad

$$\begin{aligned} \text{Log} \left[\frac{\Gamma(\phi)}{\Gamma(\phi\mu)\Gamma((1-\mu)\phi)} x^{\phi\mu-1} (1-x)^{(1-\mu)\phi-1} \right] = \\ \text{Log}(\Gamma(\phi)) - \text{Log}(\Gamma(\phi\mu)) - \text{Log}(\Gamma((1-\mu)\phi)) \\ + (\phi\mu - 1)\text{Log}(x) + ((1-\mu)\phi - 1)\text{Log}(1-x) \end{aligned}$$

Derivadas de μ

$$\frac{df'}{d\mu} = -\phi\psi^{(1)}(\phi\mu) + \phi\psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + (\phi)\text{Log}(x) - \phi\text{Log}(1-x)$$

$$\frac{df''}{d\mu} = -\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)$$

Derivadas de ϕ

$$\frac{df'}{d\phi} = \psi^{(1)}(\phi) - \mu\psi^{(1)}(\phi\mu) - (1-\mu)\psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + (\mu)\text{Log}(x) + (1-\mu)\text{Log}(1-x)$$

$$\frac{df''}{d\phi} = \psi^{(2)}(\phi) - \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)$$

Derivadas cruzadas

$$\frac{df'}{d\phi} = \psi^{(1)}(\phi) - \mu\psi^{(1)}(\phi\mu) - (1-\mu)\psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + (\mu)\text{Log}(x) + (1-\mu)\text{Log}(1-x)$$

$$\begin{aligned} \frac{df''}{d\phi d\mu} &= -\mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(1)}(\phi\mu) + (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\ &+ \psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + \text{Log}(x) - \text{Log}(1-x) \end{aligned}$$

Matriz de información de Fisher

$$I(\theta) = -E \left\{ \begin{array}{cc} \frac{df''}{d\phi} & \frac{df''}{d\phi d\mu} \\ \frac{df''}{d\phi d\mu} & \frac{df''}{d\mu} \end{array} \right\}$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned}
 E\left(\ln(x)\right) &= \psi^{(1)}(\alpha) - \psi^{(1)}(\alpha + \beta) \\
 E\left(\ln(1-x)\right) &= \psi^{(1)}(\beta) - \psi^{(1)}(\alpha + \beta) \\
 \alpha &= \phi\mu \\
 \beta &= (1-\mu)\phi
 \end{aligned}$$

Aplicando la esperanza en la derivada cruzada obtenemos los siguiente

$$\begin{aligned}
 E\left(\frac{df''}{d\phi d\mu}\right) &= -\mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(1)}(\phi\mu) + (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\
 &+ \psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + \psi^{(1)}(\phi\mu) - \psi^{(1)}(\phi) - \psi^{(1)}((1-\mu)\phi) + \psi^{(1)}(\phi)
 \end{aligned}$$

$$E\left(\frac{df''}{d\phi d\mu}\right) = -\mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) + (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)$$

$$I(\theta) = -\begin{Bmatrix} A & B \\ C & D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -A & -B \\ -C & -D \end{Bmatrix}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 -A &= -\psi^{(2)}(\phi) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + (1-\mu)^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\
 -B &= \mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\
 -C &= \mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\
 -D &= \phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + \phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)
 \end{aligned}$$

A priori de Jeffrey

$$\xi(\theta)\alpha|I(\theta)|^{1/2} = \left| \begin{array}{cc} -\psi^{(2)}(\phi) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + (1-\mu)^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) & \mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\ \mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) & \phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + \phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \end{array} \right|^{1/2}$$

$$= \left(\left(-\psi^{(2)}(\phi) + \mu^2 \psi^{(2)}(\phi\mu) + (1-\mu)^2 \psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right) \left(\phi^2 \psi^{(2)}(\phi\mu) + \phi^2 \psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right) - \left(\mu\phi \psi^{(2)}(\phi\mu) - (1-\mu)\phi \psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right)^2 \right)^{1/2}$$

$$\begin{aligned} \xi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2} &= \left(-\psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right. \\ &+ \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\ &+ (1-\mu)^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) + (1-\mu)^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \\ &\left. - \left(\mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu) \right)^2 + 2\mu\phi\psi^{(2)}(\phi\mu)(1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) - \left((1-\mu)\phi\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right)^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xi(\theta) \propto |I(\theta)|^{1/2} &= \left(-\psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right. \\ &+ \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) + (1-\mu)^2\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\psi^{(2)}(\phi\mu) \\ &\left. + 2\mu(1-\mu)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Función de verosimilitud de la distribución beta de Ferrari:

$$\begin{aligned} L(\phi, \mu | x) &= \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{(\phi\mu-1)}(1-x_i)^{(1-\mu)\phi-1}}{B((1-\mu)\phi, \phi\mu)} \\ &= \frac{(\Gamma(\phi))^n}{(\Gamma(\phi\mu))^n (\Gamma((1-\mu)\phi))^n} \prod_{i=1}^n e^{\left(\text{Log} \left(x_i^{(\phi\mu-1)}(1-x_i)^{(1-\mu)\phi-1} \right) \right)} \\ &= \frac{(\Gamma(\phi))^n}{(\Gamma(\phi\mu))^n (\Gamma((1-\mu)\phi))^n} e^{\left(\sum_{i=1}^n \text{Log} \left(x_i^{(\phi\mu-1)}(1-x_i)^{(1-\mu)\phi-1} \right) \right)} \\ &= \frac{(\Gamma(\phi))^n}{(\Gamma(\phi\mu))^n (\Gamma((1-\mu)\phi))^n} e^{\left(\sum_{i=1}^n \left((\phi\mu-1)\text{Log}(x_i) + ((1-\mu)\phi-1)\text{Log}(1-x_i) \right) \right)} \end{aligned}$$

3.1.7. Distribución posterior

Distribución A posteriori de μ

$$\begin{aligned} \xi(\mu, \phi|x) &\propto L(\mu, \phi|x)\xi(\mu, \phi) = \\ &\left(-\psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right. \\ &\left. + (1-\mu)^2\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\psi^{(2)}(\phi\mu) + 2\mu(1-\mu)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right)^{1/2} \\ &\frac{(\Gamma(\phi))^n}{(\Gamma(\phi\mu))^n(\Gamma((1-\mu)\phi))^n} e^{\left(\sum_{i=1}^n (\phi\mu - 1)\text{Log}(x_i) + ((1-\mu)\phi - 1)\text{Log}(1-x_i) \right)} \end{aligned}$$

Aplicamos el logaritmo en la distribución posterior para poder aplicar los muestreadores

$$\begin{aligned} &\text{Log} \left(\left(-\psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (1-\mu)^2\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\psi^{(2)}(\phi\mu) + 2\mu(1-\mu)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \frac{(\Gamma(\phi))^n}{(\Gamma(\phi\mu))^n(\Gamma((1-\mu)\phi))^n} e^{\left(\sum_{i=1}^n (\phi\mu - 1)\text{Log}(x_i) + ((1-\mu)\phi - 1)\text{Log}(1-x_i) \right)} \right) \\ &= \frac{1}{2}\text{Log} \left(-\psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu) - \psi^{(2)}(\phi)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) + \mu^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right. \\ &\quad \left. + (1-\mu)^2\phi^2\psi^{(2)}((1-\mu)\phi)\psi^{(2)}(\phi\mu) + 2\mu(1-\mu)\phi^2\psi^{(2)}(\phi\mu)\psi^{(2)}((1-\mu)\phi) \right) \\ &\quad + n\text{Log}(\Gamma(\phi)) - n\text{Log}(\Gamma(\phi\mu)) - n\text{Log}(\Gamma((1-\mu)\phi)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \left((\phi\mu - 1)\text{Log}(x_i) + ((1-\mu)\phi - 1)\text{Log}(1-x_i) \right) \end{aligned}$$

3.2. Estimación de Parámetros

Para estimar los parámetros α y β se partió de las ecuaciones de la esperanza y la varianza de la distribución beta, las cuales son las siguientes:

$$E(x) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad y \quad V(x) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Despejando β de la ecuación de la esperanza se obtiene:

$$\beta = \alpha \left(\frac{1}{E(x)} - 1 \right)$$

Se sustituye β en la ecuación de la varianza y se obtiene las ecuaciones para estimar los parámetros α y β

$$\alpha = \left(\left(\frac{E(x)(1-E(x))}{V(x)} \right) - 1 \right) E(X) \quad Si \quad V(x) < E(x)(1-E(x))$$

$$\beta = \left(\left(\frac{E(x)(1-E(x))}{V(x)} \right) - 1 \right) (1-E(X)) \quad Si \quad V(x) < E(x)(1-E(x))$$

Entonces los estimadores de los parámetros serian:

$$\hat{\alpha} = \left(\left(\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} \right) - 1 \right) \bar{x}$$

$$\hat{\beta} = \left(\left(\frac{\bar{x}(1-\bar{x})}{S^2} \right) - 1 \right) (1-\bar{x})$$

Los estimadores de los parámetros ϕ y μ son los siguientes:

$$\hat{\phi} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \quad \hat{\mu} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\alpha} + \hat{\beta}}$$

3.3. Estimación de tasa de letalidad media global y los intervalos de credibilidad

Los resultados de este estudio fueron realizados mediante el uso del lenguaje de programación R, del software Rstudio y las librerías *"mcmc"* y *"bayestestR"* del mismo programa. Se hizo uso de muestreadores de Metropolis-Hastings para realizar la estimación de la tasa media de letalidad acumulada diaria global, este proceso hace uso de la simulación Monte Carlo vía Cadenas de Markov y necesita los tres siguientes elementos para poder generar simulaciones:

1. El logaritmo de la distribución posterior de la distribución beta reparametriza, para simplificar la función.
2. Los parámetros estimados como valores iniciales de la cadena, al ser un proceso iterativo al empezar con un valor cercano al real la convergencia sucede más rápido.
3. La tasa de letalidad diaria acumulada de cada país. Las tasas debían estar dentro del intervalo $(0, 1)$, cualquiera que no estuviese dentro de ese intervalo era descartada.

La estimación empieza 14 días después del reporte del primer caso de COVID-19, el día 15 es la primera estimación, esto debido a que se está teniendo en cuenta el tiempo que transcurre desde que el paciente es infectado hasta su defunción, se estima hasta el día 379, un periodo de 365 días de estudio.

3.4. Análisis de Resultados

La tasa de letalidad mediana posterior diaria acumulada tuvo su mayor pico el primer día, un valor del 42.09%, a medida que el tiempo avanza esta tasa ha ido disminuyendo con considerable rapidez, a los 14 días ya había disminuido la mitad de su valor inicial, y para los 100 días la letalidad del virus se estabiliza en un intervalo del 2%

al 5 %, aproximadamente. Esta tendencia también la han tenido las tasas de cada país a nivel mundial de manera individual, tasas altas al principio que disminuyen de manera acelerada. Esto se debe que los primeros días de la pandemia los países no estaban preparados de la mejor manera y la naturaleza del virus permite una rápida expansión del numero de contagiados.

Día	Limite Inferior del I.C	Mediana	Limite Superior del I.C
15	0.40827	0.42099	0.43409
16	0.39138	0.40252	0.41332
17	0.34082	0.3521	0.36275
18	0.30984	0.31988	0.3301
19	0.30358	0.31457	0.32581
20	0.2862	0.29677	0.30859
21	0.29425	0.30613	0.31751
22	0.28637	0.2979	0.30933
23	0.26527	0.27629	0.28768
24	0.23873	0.24909	0.25931
25	0.23287	0.2424	0.25234

Cuadro 3.4.1: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad para los primeros 10 días

En la figura 3.4.1 se presenta la estimación de la esperanza de la tasa de letalidad empleando la mediana posterior de μ . Se puede observar el desenlace de la tasa media global del virus COVID-19 y su intervalo de credibilidad al 89 %, esta empieza el día 15 y finiquita en el día 379, para completar un año calendario. La tasa media global fue muy alta al inicio de la pandemia debió a la falta de información de la transmisión y control de virus, muchos países tuvieron más casos de los reportados debido a la alta incidencia del virus y la difícil identificación de contagiados, esto trajo como consecuencia que hubiese mas defunciones por COVID-19 de las esperadas. El punto más alto fue obtenido el día 15 con un valor de 41 % y el valor más bajo fue el día 379 con un valor del 1 %. Para ver de manera mas clara las estimaciones de los primeros 100 días de la gráfica, ver Anexos.

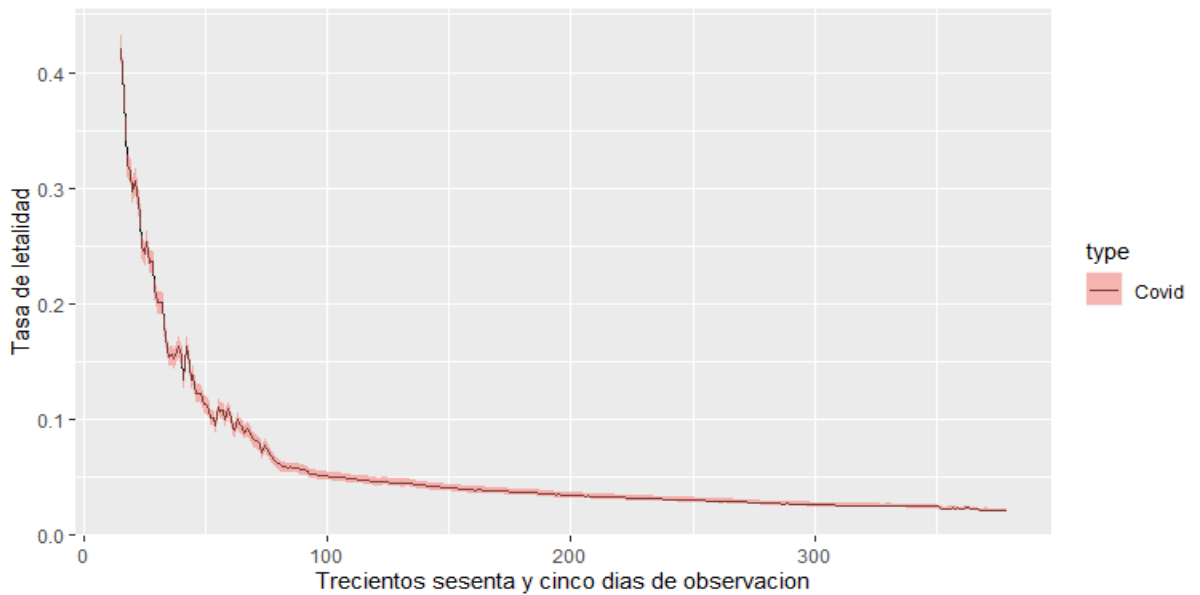


Figura 3.4.1: *Mediana posterior durante 365 días*

Se compara la tasa de letalidad media global con las tasas de letalidad observadas en los países, los países seleccionados fueron separados en dos grupos: Países desarrollados y en vías de desarrollados, según el Fondo Monetario Internacional, en los grupos se encuentran los siguientes países:

Países desarrollados: Canadá, Corea del Sur, España, Estados Unidos, Israel y Reino Unido.

Países en vía de desarrollado: Brasil, Chile, Colombia, Egipto, India, México y Venezuela.

En el primer grupo se encontró que todos los países a excepción de Israel tuvieron un pico donde superaron la media global, España, Italia y Estados Unidos fueron los países que registraron las tasas de letalidad mas altas, superando la tasa de 1. Estados unidos es el país con mayor cantidad de contagiados y fallecidos acumulados debido a la COVID-19 a nivel mundial.

La tasa de letalidad del Reino Unido fue la segunda que más días necesito para caer debajo del 10%, superado solo por Italia. Solo Corea del Sur e Israel, país que tuvo su pico en el 9% de letalidad, estabilizaron su tasa con la tasa media antes de los 100 días, todos los demás tardaron 200 en acercarse o igualarla en algunos casos. Todo esto se

puede ver en la figura 3.4.2

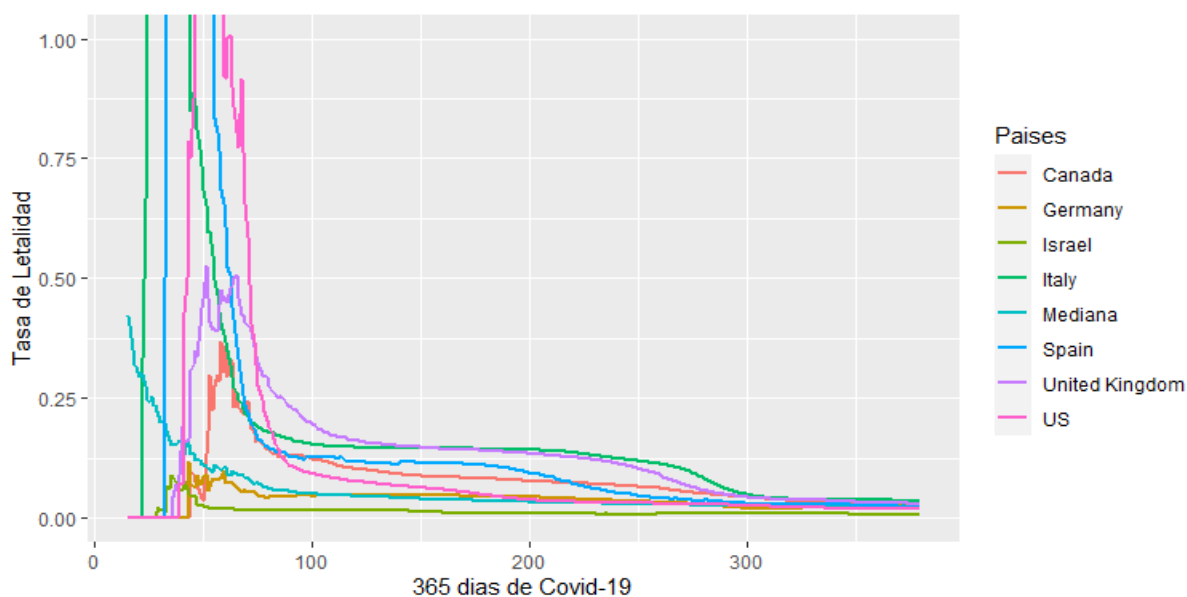


Figura 3.4.2: Países Desarrollados

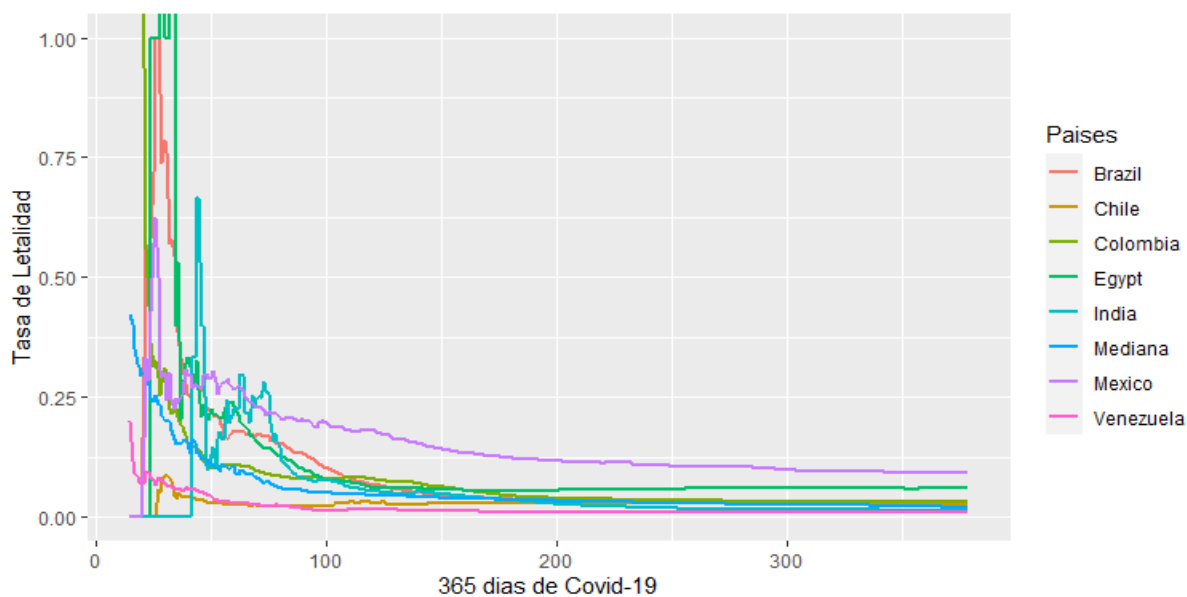


Figura 3.4.3: Países en vías de desarrollados

En la Figura 3.4.3 comparamos los países en vías de desarrollo, se encontró que a diferencia de los países desarrollados estos empezaron a acercarse a la tasa media mucho más rápido, los únicos países que nunca se acercaron a la misma fue México y Egipto, ya que al día 365 mantienen una letalidad mayor al 5%, el segundo mencionado fue el país que tuvo el pico más alto y longevo de letalidad del grupo, cabe resaltar el caso

de Venezuela y Chile, ya que ambos desde el primer día tuvieron una tasa de letalidad menor que la tasa media y nunca la superan en los 365 días.

Capítulo 4

Conclusiones

Se pudo modelar de manera exitosa la distribución de la esperanza tasa de letalidad acumulada diaria global de la COVID-19, y encontrar su mediana, esto debido a que fue posible realizar el proceso teórico con el cual se pudo encontrar un buen estimador haciendo uso de la distribución a priori de Jeffrey y la distribución beta reparametrizada por Ferrari, debido a que la distribución beta clásica es mas exigente computacionalmente y encontrar la distribución de la esperanza es mas complicado.

Las estimaciones se realizaron en el software estadístico R, en este se pudo estimar la tasa mediana diaria y sus respectivos intervalos de credibilidad al 89%. Con las estimaciones realizadas se logro comparar algunos países y ver que tan bien pudieron controlar al virus en comparación con la medida de centralidad. Se encontró que los países desarrollados tuvieron mas problemas que los que están en vía de desarrollo, países como Brasil, tercer país con mas defunciones por COVID-19 a nivel mundial, tiene una tasa menor que Italia y Estados Unidos, por lo cual se puede creer que en estos países las primeras semanas no se controló de manera adecuada la expansión del virus, dicho casi todos los países tuvieron una tasa de letalidad homogénea al final del periodo de estudio, la tasa se estabilizó cerca del 2%, y se espera que siga en caída con la llegada de las distintas vacunas.

Capítulo 5

Anexos

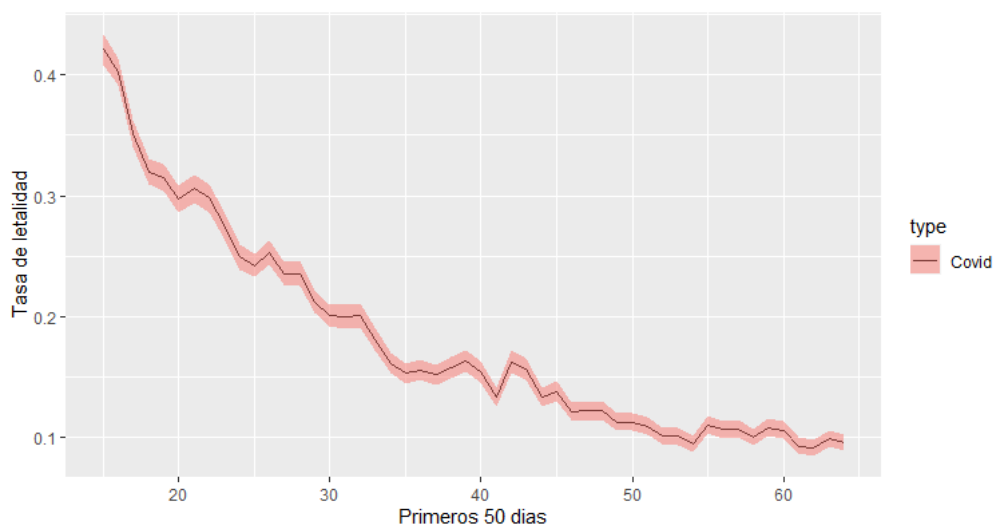


Figura 5.0.1: *Tasa de letalidad mediana primeros 50 días*

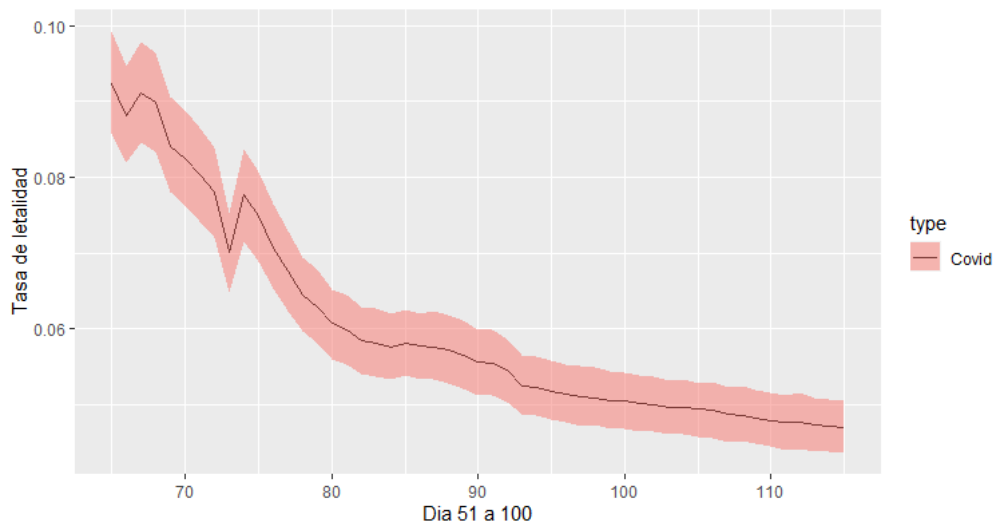


Figura 5.0.2: *Tasa de letalidad mediana desde el día 51 al 100*

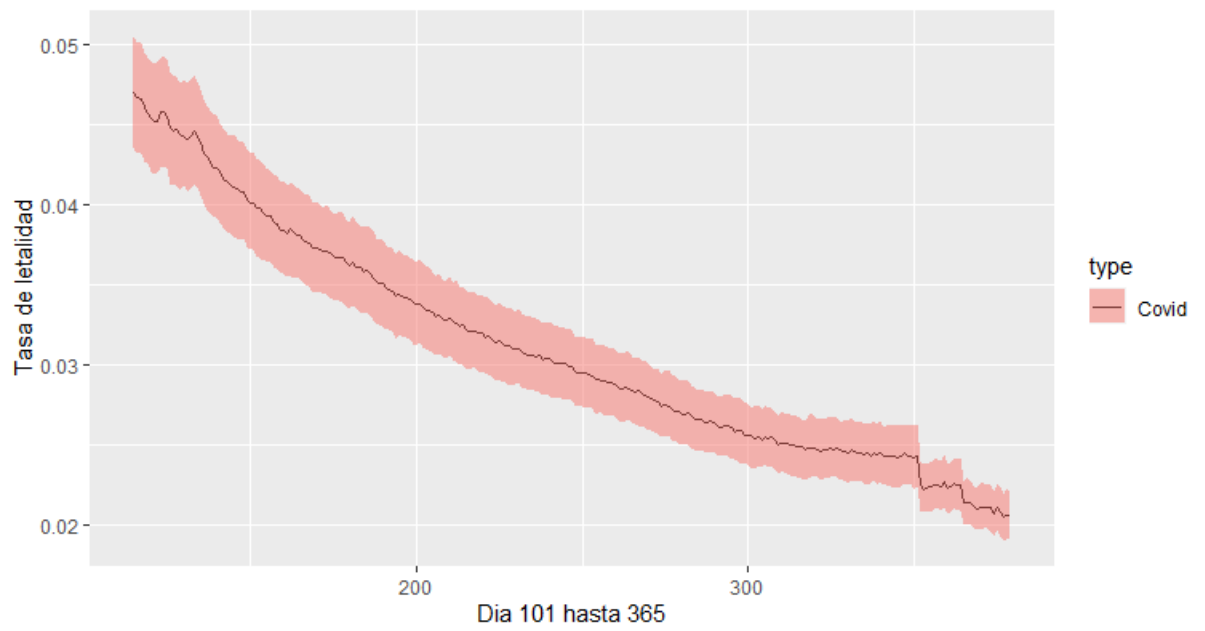


Figura 5.0.3: *Tasa de letalidad mediana después de 101 días*

País	Muertes acumuladas por COVID-19
Dominica	0
Ciudad del Vaticano	0
Islas Marshall	0
Micronesia	0
San Cristóbal y Nieves	3
Samoa	0
Islas Salomón	0
Timor Oriental	20
Vanuatu	1
Laos	0

Cuadro 5.0.1: Países eliminados del estudio

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
15	0.40827	0.42099	0.43409
16	0.39138	0.40252	0.41332
17	0.34082	0.3521	0.36275
18	0.30984	0.31988	0.3301
19	0.30358	0.31457	0.32581
20	0.2862	0.29677	0.30859
21	0.29425	0.30613	0.31751
22	0.28637	0.2979	0.30933
23	0.26527	0.27629	0.28768
24	0.23873	0.24909	0.25931
25	0.23287	0.2424	0.25234
26	0.24259	0.25301	0.26338
27	0.22582	0.23552	0.24573
28	0.2257	0.23562	0.24607
29	0.20276	0.21219	0.22209
30	0.19154	0.20075	0.21019
31	0.19019	0.20008	0.20941
32	0.19095	0.20048	0.21036
33	0.17205	0.18115	0.19045
34	0.15306	0.161	0.1698
35	0.14485	0.15318	0.16102
36	0.14728	0.15566	0.16402
37	0.14296	0.15174	0.15976
38	0.14893	0.15772	0.16639
39	0.15383	0.16277	0.17202
40	0.14551	0.15472	0.16359
41	0.12536	0.13312	0.14121
42	0.15319	0.1624	0.17151
43	0.14801	0.15702	0.16585
44	0.12549	0.13347	0.14147
45	0.12985	0.13796	0.14629
46	0.11407	0.12127	0.12924
47	0.11363	0.12172	0.12915
48	0.11414	0.1222	0.12997
49	0.10543	0.11249	0.12003
50	0.10511	0.11227	0.11986
51	0.10191	0.1089	0.11621
52	0.09435	0.10126	0.10812
53	0.09385	0.10066	0.10754

Cuadro 5.0.2: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
54	0.08783	0.09446	0.1009
55	0.10352	0.11047	0.11823
56	0.09913	0.10631	0.11356
57	0.09968	0.10667	0.11392
58	0.09333	0.09998	0.10718
59	0.10075	0.10803	0.11537
60	0.09869	0.10594	0.11316
61	0.08649	0.09274	0.09956
62	0.08425	0.09077	0.09729
63	0.09167	0.09885	0.10568
64	0.08846	0.09543	0.10209
65	0.08587	0.09226	0.09929
66	0.08199	0.08814	0.09466
67	0.08448	0.09117	0.09776
68	0.08339	0.08984	0.09632
69	0.078	0.08404	0.09062
70	0.07624	0.08246	0.08874
71	0.07411	0.08037	0.08651
72	0.07195	0.07811	0.08388
73	0.06478	0.07004	0.07525
74	0.07146	0.07766	0.08375
75	0.06882	0.07477	0.08065
76	0.06529	0.07064	0.07639
77	0.06235	0.06758	0.07293
78	0.05959	0.06436	0.06931
79	0.05806	0.06282	0.06774
80	0.05601	0.06076	0.06517
81	0.05532	0.05982	0.06449
82	0.05399	0.05838	0.06291
83	0.05371	0.05814	0.06271
84	0.05327	0.05758	0.06189
85	0.05383	0.05812	0.06258
86	0.05328	0.05768	0.0619
87	0.05338	0.05754	0.06225
88	0.0528	0.05721	0.0618
89	0.05214	0.05652	0.06104
90	0.05124	0.0556	0.05981
91	0.05117	0.05539	0.0598
92	0.05033	0.0545	0.05862

Cuadro 5.0.3: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
93	0.04878	0.05246	0.05654
94	0.04848	0.05233	0.05637
95	0.04809	0.05181	0.05573
96	0.04766	0.05137	0.05519
97	0.04713	0.05107	0.05501
98	0.04726	0.05088	0.05497
99	0.04682	0.05053	0.05445
100	0.04671	0.05049	0.05421
101	0.04643	0.05007	0.05391
102	0.04644	0.0499	0.05365
103	0.046	0.04958	0.05314
104	0.04611	0.04959	0.05329
105	0.04569	0.04935	0.05281
106	0.0455	0.04924	0.05291
107	0.04502	0.0488	0.05226
108	0.04518	0.04858	0.05242
109	0.04482	0.04819	0.05197
110	0.04452	0.04788	0.05147
111	0.04403	0.04769	0.05123
112	0.04423	0.04773	0.05156
113	0.04382	0.04739	0.05081
114	0.04375	0.04715	0.05076
115	0.04358	0.04694	0.05053
116	0.0432	0.04667	0.05018
117	0.0432	0.04658	0.05012
118	0.04272	0.04605	0.04947
119	0.04255	0.04572	0.04923
120	0.0421	0.04543	0.04896
121	0.04191	0.04516	0.04879
122	0.04199	0.04523	0.04887
123	0.04225	0.04576	0.04909
124	0.04235	0.0458	0.04928
125	0.04226	0.0455	0.04906
126	0.04131	0.04482	0.04829
127	0.04116	0.04459	0.04809
128	0.04122	0.04464	0.04801
129	0.0409	0.04435	0.04758
130	0.04114	0.04421	0.04774
131	0.04079	0.04413	0.04762

Cuadro 5.0.4: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
132	0.04097	0.04431	0.04778
133	0.04128	0.04456	0.04805
134	0.0411	0.04425	0.0477
135	0.04059	0.04392	0.0472
136	0.04007	0.04315	0.0466
137	0.03972	0.04295	0.04618
138	0.0395	0.04269	0.0459
139	0.03932	0.04228	0.04556
140	0.03919	0.04224	0.04563
141	0.03886	0.04207	0.04512
142	0.03859	0.0416	0.0448
143	0.03825	0.04136	0.04441
144	0.03814	0.04119	0.04432
145	0.03797	0.04113	0.04441
146	0.03791	0.04094	0.04406
147	0.03777	0.04076	0.04384
148	0.03784	0.04074	0.04385
149	0.03739	0.04033	0.04349
150	0.03721	0.04004	0.04315
151	0.0372	0.04007	0.04327
152	0.03681	0.03983	0.04281
153	0.03667	0.03974	0.04275
154	0.03646	0.03951	0.04261
155	0.03646	0.03931	0.04227
156	0.03641	0.03926	0.04211
157	0.03605	0.03891	0.04186
158	0.03599	0.03882	0.04182
159	0.03563	0.03841	0.04141
160	0.03568	0.03843	0.04151
161	0.03549	0.03823	0.04119
162	0.03557	0.03851	0.04132
163	0.03542	0.03831	0.0413
164	0.03538	0.03809	0.04108
165	0.03536	0.03813	0.04099
166	0.03515	0.03783	0.0408
167	0.0349	0.03765	0.04054
168	0.03488	0.03763	0.04057
169	0.03451	0.03733	0.04013
170	0.0345	0.03724	0.04021

Cuadro 5.0.5: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
171	0.03455	0.03717	0.04
172	0.03438	0.03709	0.03983
173	0.03442	0.03707	0.03997
174	0.03414	0.03696	0.03967
175	0.03403	0.03679	0.0394
176	0.03396	0.03664	0.0394
177	0.03396	0.03671	0.03954
178	0.03391	0.03666	0.03947
179	0.03366	0.03635	0.03913
180	0.03346	0.03617	0.03892
181	0.03368	0.03638	0.03924
182	0.03355	0.03609	0.03901
183	0.03325	0.03609	0.03864
184	0.03315	0.03581	0.03859
185	0.03327	0.03586	0.03865
186	0.03303	0.03566	0.03863
187	0.03275	0.03538	0.03834
188	0.0326	0.03521	0.03793
189	0.0325	0.0351	0.0378
190	0.03242	0.03507	0.03783
191	0.03217	0.03481	0.03753
192	0.03218	0.03468	0.03732
193	0.03209	0.03457	0.03731
194	0.03157	0.03431	0.03691
195	0.03184	0.03437	0.03716
196	0.03163	0.03414	0.03673
197	0.03168	0.03413	0.03689
198	0.03153	0.03405	0.03658
199	0.03131	0.03386	0.03654
200	0.03117	0.03376	0.03639
201	0.03134	0.03378	0.03654
202	0.03104	0.03362	0.03637
203	0.03102	0.03335	0.03611
204	0.03091	0.03334	0.03608
205	0.03075	0.0333	0.03574
206	0.0306	0.033	0.03552
207	0.03067	0.03312	0.03565
208	0.03053	0.03285	0.03535
209	0.03036	0.03276	0.03517

Cuadro 5.0.6: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
210	0.03061	0.03292	0.03543
211	0.03023	0.03266	0.03503
212	0.03017	0.03261	0.03524
213	0.02999	0.03239	0.03482
214	0.03	0.03243	0.03484
215	0.02975	0.03222	0.03468
216	0.02969	0.03211	0.03452
217	0.02981	0.03206	0.03458
218	0.02973	0.03211	0.03449
219	0.0295	0.03198	0.03425
220	0.02944	0.03195	0.03437
221	0.02947	0.03171	0.03418
222	0.02942	0.03174	0.03415
223	0.02921	0.03147	0.03386
224	0.02899	0.03142	0.0337
225	0.02912	0.03146	0.0339
226	0.0289	0.03124	0.03361
227	0.02889	0.03121	0.03354
228	0.02865	0.0312	0.03344
229	0.02868	0.03102	0.03345
230	0.02878	0.031	0.03331
231	0.02885	0.03096	0.03351
232	0.0285	0.03075	0.03318
233	0.02853	0.0307	0.03306
234	0.02833	0.03053	0.03302
235	0.02852	0.0306	0.03297
236	0.02824	0.03048	0.03288
237	0.02823	0.03053	0.03276
238	0.02806	0.03027	0.03253
239	0.02819	0.03035	0.03258
240	0.02806	0.03035	0.03269
241	0.02783	0.03022	0.03262
242	0.0279	0.03006	0.03234
243	0.02794	0.0301	0.03234
244	0.02788	0.03006	0.03223
245	0.02774	0.03007	0.03229
246	0.0278	0.02989	0.03213
247	0.02773	0.02986	0.03218
248	0.02744	0.02962	0.0318

Cuadro 5.0.7: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
249	0.02742	0.02946	0.03172
250	0.02735	0.0295	0.03174
251	0.02731	0.02947	0.0317
252	0.02731	0.02937	0.03161
253	0.02724	0.02932	0.03165
254	0.0269	0.02908	0.0312
255	0.02698	0.02912	0.03129
256	0.02694	0.029	0.03114
257	0.0268	0.02899	0.03114
258	0.02675	0.02889	0.03111
259	0.02674	0.02888	0.03095
260	0.02673	0.02873	0.03095
261	0.02662	0.0286	0.03076
262	0.02641	0.0285	0.03065
263	0.02644	0.02855	0.03078
264	0.02653	0.02851	0.03076
265	0.02632	0.02838	0.0305
266	0.02628	0.02831	0.03041
267	0.02614	0.02833	0.03048
268	0.02609	0.02822	0.03022
269	0.02611	0.02806	0.03023
270	0.02586	0.02797	0.03004
271	0.0259	0.02791	0.02991
272	0.0258	0.02776	0.02972
273	0.02568	0.02769	0.02974
274	0.02547	0.02742	0.02936
275	0.02544	0.02747	0.0296
276	0.02553	0.02738	0.02965
277	0.02519	0.02719	0.02927
278	0.02527	0.0271	0.02923
279	0.02503	0.0271	0.02897
280	0.02499	0.02688	0.02906
281	0.02498	0.0269	0.029
282	0.02502	0.02693	0.02894
283	0.02479	0.02677	0.02866
284	0.02469	0.02659	0.02856
285	0.02454	0.02654	0.02837
286	0.02465	0.02656	0.0285
287	0.02453	0.0264	0.02834

Cuadro 5.0.8: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
288	0.02447	0.02639	0.02829
289	0.02453	0.02644	0.02841
290	0.02446	0.02628	0.02819
291	0.02428	0.02608	0.028
292	0.02426	0.0261	0.02796
293	0.02435	0.02617	0.02814
294	0.02425	0.02618	0.02807
295	0.02405	0.02605	0.02811
296	0.02408	0.02582	0.02789
297	0.02398	0.02586	0.02795
298	0.02377	0.02587	0.02786
299	0.02378	0.02561	0.02766
300	0.02382	0.02562	0.02756
301	0.02362	0.0256	0.02725
302	0.02344	0.02541	0.02734
303	0.02369	0.02548	0.02746
304	0.02353	0.0253	0.02718
305	0.02376	0.02547	0.02744
306	0.02359	0.02539	0.02724
307	0.02365	0.02544	0.02725
308	0.02344	0.02524	0.02709
309	0.0232	0.02496	0.02679
310	0.02323	0.02508	0.02693
311	0.02327	0.02505	0.02698
312	0.02319	0.02509	0.0269
313	0.02308	0.02497	0.02686
314	0.02299	0.02495	0.0268
315	0.02301	0.02489	0.02674
316	0.02289	0.02485	0.02659
317	0.02279	0.02472	0.02652
318	0.02292	0.02482	0.02674
319	0.02301	0.02479	0.02697
320	0.02305	0.02479	0.02676
321	0.023	0.02467	0.02657
322	0.02281	0.02461	0.02655
323	0.02288	0.02465	0.02658
324	0.02283	0.02468	0.02664
325	0.02294	0.02473	0.02665
326	0.02294	0.02469	0.02675

Cuadro 5.0.9: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
327	0.02293	0.02475	0.02672
328	0.02277	0.02465	0.02641
329	0.02278	0.0246	0.02647
330	0.02262	0.0245	0.02644
331	0.02282	0.02469	0.02663
332	0.02268	0.0246	0.0265
333	0.0227	0.02452	0.02634
334	0.02274	0.0245	0.02647
335	0.02255	0.0244	0.02626
336	0.02252	0.02443	0.02633
337	0.02256	0.02429	0.02629
338	0.02279	0.02445	0.02645
339	0.02244	0.02433	0.02623
340	0.02267	0.02451	0.0265
341	0.02248	0.02428	0.02605
342	0.02243	0.02431	0.02618
343	0.02239	0.02424	0.02613
344	0.02228	0.02425	0.02618
345	0.02231	0.0242	0.02615
346	0.02237	0.02423	0.02613
347	0.02256	0.02443	0.02619
348	0.02244	0.02429	0.02618
349	0.02253	0.02427	0.02624
350	0.02216	0.02416	0.02614
351	0.02241	0.02431	0.02624
352	0.02084	0.02244	0.02395
353	0.02078	0.02222	0.02381
354	0.02076	0.02224	0.02375
355	0.02072	0.02234	0.02387
356	0.02099	0.02245	0.02405
357	0.02103	0.02249	0.02406
358	0.02086	0.02234	0.024
359	0.02108	0.02266	0.02436
360	0.02069	0.02229	0.02374
361	0.0208	0.02239	0.02389
362	0.02103	0.02262	0.02419
363	0.02087	0.02251	0.02412
364	0.0209	0.02247	0.02413
365	0.02004	0.02135	0.0227

Cuadro 5.0.10: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día(continuación)

Día	Limite Inferior	Mediana	Limite Superior
366	0.01997	0.0214	0.02294
367	0.02003	0.02136	0.02277
368	0.01983	0.02116	0.02246
369	0.01966	0.021	0.02232
370	0.01966	0.0211	0.02253
371	0.01972	0.02109	0.02255
372	0.01973	0.02107	0.02248
373	0.01958	0.02104	0.02247
374	0.01927	0.02067	0.02212
375	0.01967	0.02105	0.02257
376	0.01925	0.02081	0.02235
377	0.01895	0.02047	0.02192
378	0.01902	0.02058	0.02228
379	0.01905	0.02057	0.02212

Cuadro 5.0.11: Mediana posterior e Intervalos de credibilidad por día

Capítulo 6

Bibliografía

Baud, D., Qi, X., Nielsen-Saines, K., Musso, D., Pomar, L., Favre, G. (2020). Real estimates of mortality following COVID-19 infection. *The Lancet Infectious Diseases*, 20(7), 773. [https://doi.org/10.1016/S1473-3099\(20\)30195-X](https://doi.org/10.1016/S1473-3099(20)30195-X)

Beaglehole, R., Bonita, R., Kjellström, T. (1994). *Epidemiologia basica*. In OMS (Ed.), *Publicación científica*; (OMS). OPS.

Benjamin, G. C. (2020). Ensuring health equity during the COVID-19 pandemic: The role of public health infrastructure. *Revista Panamericana de Salud Publica/Pan American Journal of Public Health*, 44, 1–4. <https://doi.org/10.26633/RPSP.2020.70>

Castellano, D. (2015). *Introducción a la Estadística Bayesiana*(tesis de licenciatura) (0 ed.). Universidad Autonoma de Barcelona.

Devianto, D., Afifah, A. N., Febrianti, I. K. (2021). The bayesian model of Covid-19 case fatality rate proportion on provinces in Indonesia. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science*, 708(1). <https://doi.org/10.1088/1755-1315/708/1/012057>

Díaz, J. E. (2020). Estimación de las tasas de mortalidad y letalidad por COVID-19 en Colombia. *Fundación Universitaria de Ciencias de La Salud*, 29, 10–14.

Etzioni, R. D., Kadane, J. B. (1995). BAYESIAN STATISTICAL METHODS IN PUBLIC HEALTH AND MEDICINE. In *Annu. Rev. Public Health* (Vol. 16).

Ferrari, S. L. P., Cribari-Neto, F. (2004). Beta regression for modelling rates and proportions. *Journal of Applied Statistics*, 31(7), 799–815. <https://doi.org/10.1080/0266476042000214501>

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A., Rubin, D. B. (2013). *Bayesian data analysis, third edition*. In *Bayesian Data Analysis, Third Edition*.

Hasan, M. N., Haider, N., Stigler, F. L., Khan, R. A., McCoy, D., Zumla, A., Kock, R. A., Uddin, M. J. (2021). The global case-fatality rate of COVID-19 has been declining since may 2020. *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 104(6), 2176–2184. <https://doi.org/10.4269/ajtmh.20-1496>

Hernández-Leiva, E. (2011). Epidemiology of acute coronary syndrome and heart failure in Latin America. *Revista Espanola de Cardiologia*, 64(SUPPL. 2), 34–43. <https://doi.org/10.1016/j.recesp.2011.01.022>

Kaciroti, N. A., Lumeng, C., Parekh, V., Boulton, M. L. (2021). A Bayesian mixture model for predicting the COVID-19 related mortality in the United States. *American Journal of Tropical Medicine and Hygiene*, 104(4), 1484–1492. <https://doi.org/10.4269/ajtmh.20-1147>

Kadane, Joseph B. Etzioni, R. D. (1995). *Metodos estadisticos aplicados en salud publica y medicina*. *Revisión Anual de Salud Pública*, 20.

Lash, R. R., Moonan, P. K., Byers, B. L., Bonacci, R. A., Bonner, K. E., Donahue, M., Donovan, C. V., Grome, H. N., Janssen, J. M., Magleby, R., McLaughlin, H. P., Miller, J. S., Pratt, C. Q., Steinberg, J., Varela, K., Anschuetz, G. L., Cieslak, P. R., Fialkowski, V., Fleischauer, A. T., ... Oeltmann, J. E. (2021). COVID-19 Case Investigation and Contact Tracing in the US, 2020. *JAMA Network Open*, 4(6), 1–12. <https://doi.org/10.1001/jamanetworkopen.2021.15850>

MacLehose, R. F., Hamra, G. B. (2014). Applications of Bayesian Methods to Epidemiologic Research. *Current Epidemiology Reports*, 1(3), 103–109. <https://doi.org/10.1007/s40471-014-0019-z>

Manrique-Abril, F. G., Pacheco-López, M. J., Téllez-Piñerez, C. F., Ortíz-Rico, F., Sarmiento-Páramo, J. D. (2020). Lethality model for COVID-19 based on social determinants of health: an approximation in 67 countries. *F1000Research*, 9, 1285. <https://doi.org/10.12688/f1000research.26055.1>

Martín-Sánchez, V., Barquilla-García, A., Vitelli-Storelli, F., Segura-Fragoso, A., Ruiz-García, A., Serrano-Cumplido, A., Olmo-Quintana, V., Calderón-Montero, A. (2020). Analysis of fatality rates case of SARS-CoV-2 infection in the Autonomous Communities of Spain. *Semergen*, 46, 12–19. <https://doi.org/10.1016/j.semERG.2020.06.013>

Martins-Filho, P. R., Araújo, A. A. S., Góes, M. A. O., de Souza, M. S. F., Quintans-Júnior, L. J., Martins, N., Santos, V. S. (2021). COVID-19 Mortality and Case-Fatality Rates in Sergipe State, Northeast Brazil, From April to June 2020. *Frontiers in Public Health*, 9(March), 1–5. <https://doi.org/10.3389/fpubh.2021.581618>

McElreath, R. (2018). *Statistical Rethinking*. Statistical Rethinking. <https://doi.org/10.1201/9781315372495>

Medeiros De Figueiredo, A., Daponte, A., Cristina, D., Marculino De Figueiredo, M., Gil-García, E., Kalache, A. (2020). ARTICLE IN PRESS G Model Letalidad del COVID-19: ausencia de patrón epidemiológico. <https://doi.org/10.1016/j.gaceta.2020.04.001>

Medeiros de Figueiredo, A., Daponte, A., Moreira Marculino de Figueiredo, D. C., Gil-García, E., Kalache, A. (2020). Case fatality rate of COVID-19: absence of epidemiological pattern. *Gaceta Sanitaria*, xx, 10–12. <https://doi.org/10.1016/j.gaceta.2020.04.001>

Medeiros Figueiredo, A., Daponte-Codina, A., Moreira Marculino Figueiredo, D. C., Toledo Vianna, R. P., Costa de Lima, K., Gil-García, E. (2020). Factors associated with the incidence and mortality from COVID-19 in the autonomous communities of Spain. *Gaceta Sanitaria*, xx. <https://doi.org/10.1016/j.gaceta.2020.05.004>

Meek, G. E., Mendenhall, W., Scheaffer, R. L., Wackerly, D. D. (1987).

Estadística Matemática Con Aplicaciones. In *Technometrics* (Vol. 29, Issue 3). https://virtualuncp.edu.pe/pluginfile.php/102549/mod_resource/content/0/LibroWackerlyMendenhallScheaffer_Estadistica_Matematica.pdf

Moreno, A., López, S., Corcho, A. (2015). Principales medidas en epidemiología. *Salud Pública de México*, 42(4), 338–348. https://www.scielosp.org/article/ssm/content/raw/resource_ssm_path=/media/assets/spm/v42n4/2882.pdf

OPS. (2021). Actualización Epidemiológica Enfermedad por coronavirus Tabla de Contenido. *Ops*, 26. Organización Mundial de la Salud. (2020a). OMS | Infecciones por coronavirus. WHO. http://www.who.int/topics/coronavirus_infections/es/

Organización Mundial de la Salud. (2020b, October 10). Información básica sobre la COVID-19. <https://www.who.int/es/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/question-and-answers-hub/q-a-detail/coronavirus-disease-covid-19>

Ronald E. Walpole, Raymond H. Myers, S. L. M. and K., Ye. (2012). Probabilidad y estadística para ingeniería y ciencias (2012 Pearson Educación (ed.); Novena edi).