Estadística Aplicada y Ciencia de Datos
Octubre 2024, Vol. 0, No. 0, pp. 1–??

Estimación de la Pobreza Multidimensional en los Municipios de Colombia mediante la Metodología de Estimación en Áreas Pequeñas para 2022

Estimation of Multidimensional Poverty in the Municipalities of Colombia Using the Small Area Estimation Methodology for 2022

Laura Alejandra Melo Buitrago[a]
lauralejandramelob@gmail.com

Laura Daniela Rodríguez Molina[b]
laura_molina0502@hotmail.com

Cristian Fernando Tellez Piñerez[c]
cftellezp@unal.edu.co

Resumen

El Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) proporciona una medición integral de la pobreza al considerar múltiples dimensiones que afectan la calidad de vida, como la educación, la salud y el acceso a servicios básicos. No obstante, su estimación a nivel municipal enfrenta retos significativos debido a la falta de datos suficientemente desagregados. Este artículo propone el uso del modelo Fay-Herriot, basado en la metodología de Estimación en Áreas Pequeñas (SAE), para calcular con mayor precisión el IPM municipal correspondiente al año 2022. El modelo permite mejorar la exactitud de las estimaciones en municipios con limitaciones de datos. Los resultados evidencian la generación de estimaciones detalladas y confiables, proporcionando una base sólida para la medición de la pobreza a un nivel más desagregado.

Palabras clave: SAE, Estimación en Áreas Pequeñas, municipios, Pobreza Multidimensional, modelo Fay Herriot, Pobreza, Colombia.

Abstract

The Multidimensional Poverty Index (MPI) provides a comprehensive measurement of poverty by considering multiple dimensions that affect quality of life, such as education, health, and access to basic services. However, its estimation at the municipal level faces significant challenges due to the lack of sufficiently disaggregated data. This article proposes the use of the Fay-Herriot model, based on the Small Area Estimation (SAE) methodology, to calculate the municipal MPI for 2022

[a]Estudiante
[b]Estudiante
[c]Director

with greater accuracy. The model improves the precision of estimates in municipalities with data limitations. The results demonstrate the generation of detailed and reliable estimates, providing a solid foundation for measuring poverty at a more disaggregated level.

Keywords: SAE, Small Area Estimation, municipalities Multidimensional Poverty Index, Fay-Herriot model, Poverty, Colombia.

1. Introducción

La pobreza ha sido un fenómeno complejo y multidimensional de alta preocupación a nivel global que afecta a millones de personas en todo el mundo. No solo se trata de la falta de ingresos, sino de la privación de derechos fundamentales como el acceso a la educación, la salud, la vivienda digna y el saneamiento, entre otros. La pobreza limita las oportunidades de desarrollo personal y colectivo, perpetuando ciclos de desigualdad. Las personas que viven en pobreza extrema sufren de una marginación social que les impide acceder a recursos básicos, afectando su calidad de vida y sus posibilidades de salir de esa situación. A nivel global, los esfuerzos para reducir la pobreza han sido una prioridad en la agenda de desarrollo, reflejados en los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), específicamente el objetivo de "poner fin a la pobreza en todas sus formas"(UN, 2018).

En el caso de Colombia, este problema adquiere una relevancia especial, dado que el país sigue siendo uno de los más afectados por la pobreza y la desigualdad en la región (Banco Mundial, 2022), existen amplias disparidades entre las diferentes regiones del país. A pesar de los avances económicos en las últimas décadas, una proporción considerable de la población sigue viviendo en condiciones de pobreza. La medición de la pobreza en Colombia, basada en la clasificación de Sen (1979), distingue entre dos enfoques: el directo y el indirecto. El enfoque indirecto, reflejado en la pobreza monetaria, se calcula a partir de la capacidad de los hogares para adquirir bienes y servicios, utilizando la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH) y estableciendo un umbral de ingresos mínimo. Por otro lado, el enfoque directo, relacionado con el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM), evalúa privaciones en dimensiones clave como educación, salud, empleo y condiciones de vivienda, capturando carencias más allá de los ingresos. El IPM considera a un hogar "pobre multidimensionalmente"si sus privaciones superan el 33 % de los indicadores. Ambos enfoques son cruciales para comprender y abordar la pobreza en el país de manera integral.

Actualmente, el Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE), encargado de la planificación, recolección, análisis y divulgación de las estadísticas oficiales, utiliza dos enfoques para la medición: la pobreza monetaria y el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM). Por un lado, la pobreza monetaria se calcula a partir de la Gran Encuesta Integrada de Hogares (GEIH), estableciendo un umbral mínimo de ingresos por debajo del cual se considera que un hogar vive en situación de pobreza. Por otro lado, el IPM se calcula a partir de la Encuesta de Calidad de Vida (ECV) y ofrece una visión más integral, considerando privaciones en 5 dimensiones: condiciones educativas del hogar, condiciones de la niñez y juventud, salud, mercado laboral y condiciones de la vivienda, es decir, evalúa el bienestar más allá de los ingresos, capturando otras carencias importantes en el hogar, asigna un valor ponderado a cada indicador y se determina si un hogar es "pobre multidimensionalmente"según si las carencias acumuladas superan un umbral específico, generalmente fijado en un 33 %. Es decir, si un hogar presenta privaciones en más de un tercio de los indicadores, se considera que vive en pobreza multidimensional.

En este contexto, los datos recolectados en estas encuestas permiten realizar estimaciones a nivel nacional, regional y departamental. Sin embargo, cuando se trata de desagregar la información a niveles más pequeños, como el municipal, surgen limitaciones debido a que las encuestas no están diseñadas para ser representativas a este nivel. Los tamaños de muestra en muchos municipios no son lo suficientemente grandes como para proporcionar estimaciones confiables, lo que dificulta el diseño de políticas públicas específicas a nivel local. Este vacío de información a nivel municipal ha llevado a la necesidad de emplear metodologías complementarias que permitan obtener estimaciones más precisas en áreas donde los datos de encuestas tradicionales son insuficientes.

De acuerdo con lo anterior, la metodología de Estimación en Áreas Pequeñas (SAE) surge como respuesta a la necesidad de generar estimaciones confiables en subpoblaciones o áreas geográficas donde el tamaño muestral es insuficiente para obtener resultados precisos utilizando técnicas tradicionales de muestreo. Esto cobra particular importancia en encuestas que buscan medir indicadores socioeconómicos, como la pobreza, a niveles más desagregados, como el municipal, donde ampliar el tamaño de la muestra implicaría costos elevados y desafíos logísticos que no son viables ni sostenibles. Para dar solución a esta necesidad, SAE utiliza modelos estadísticos que combinan la información disponible en la encuesta, con variables auxiliares, como registros administrativos o datos censales, mejorando la precisión sin necesidad de aumentar el tamaño de la muestra. (Molina & Rao, 2010) Por tanto, este enfoque permite que las instituciones puedan ofrecer estimaciones más detalladas sin incurrir en costos elevados, y es particularmente útil para la formulación de políticas públicas más específicas y localizadas. En países como Colombia, donde los recursos para la recolección de datos son limitados, SAE es esencial para desagregar indicadores importantes, como el nivel de pobreza, a escalas más pequeñas que las alcanzadas por las metodologías tradicionales, permitiendo así una mejor comprensión de las desigualdades regionales y una asignación más eficiente de los recursos.

Aunque la metodología de estimación en áreas pequeñas (SAE) ha ganado popularidad en diversos países debido a su capacidad para generar estimaciones a niveles de desagregación más pequeños que los tradicionalmente se pueden calcular con muestras reducidas, su uso en Colombia es relativamente reciente y poco difundido. A pesar de que esta técnica ha demostrado ser valiosa en el ámbito académico y en la producción de estadísticas oficiales, existen pocos estudios que la implementen a nivel nacional. Las primeras aplicaciones documentadas en el país datan de 2016, y aún hoy su adopción por parte de entidades gubernamentales, como el DANE, es limitada (Rico, Tellez, Vargas, 2024).

2. Marco Teórico

En este capítulo, se examina la metodología empleada para determinar el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) a partir de la Encuesta de Calidad de Vida y un conjunto de variables auxiliares relacionadas, permitiendo así su cálculo a nivel de desagregación municipal. Para ello, se aplica la metodología de Estimación en Áreas Pequeñas (SAE), utilizando el modelo Fay-Herriot (1979). Aunque la estimación no abarca todos los dominios posibles, los que se analizan en este apartado han sido seleccionados estratégicamente para ejemplificar la técnica SAE.

La pobreza puede definirse como una situación de privación significativa del bienestar, abarcando tanto dimensiones monetarias como no monetarias. Desde el enfoque monetario, un hogar es considerado pobre si sus ingresos se sitúan por debajo de un umbral establecido, mientras que la perspectiva no monetaria destaca la importancia de factores como el acceso a servicios básicos, la educación y la inclusión social. Este enfoque integral se encuentra respaldado por la literatura en la que se sostiene

que la pobreza no se limita únicamente a la falta de recursos económicos, sino que también está influenciada por la capacidad de los hogares para participar plenamente en la sociedad (Sen, 1999). Así, la identificación de la pobreza se asocia a una serie de variables que reflejan el acceso a recursos y oportunidades, así como los hábitos de consumo y gasto.

A través de esta metodología, se busca generar un indicador que refleje de manera cuantitativa las características y fenómenos asociados a las privaciones multidimensionales que enfrentan los hogares a nivel municipal en Colombia. Estos indicadores son esenciales para el diagnóstico y seguimiento de las políticas públicas, ya que facilitan la medición de cambios en contextos de desarrollo específicos, permiten monitorear el cumplimiento de compromisos y ofrecen alertas tempranas para alcanzar los objetivos establecidos.

Por tanto, haciendo uso de las fuentes auxiliares de información obtenidas se implementará la técnica de muestreo en áreas pequeñas y el modelo Fay-Herriot para calcular estimadores directos (EBLUP, Empirical Best Linear Unbiased Predictor) como lo propusieron Molina & Rao (2010) para el Índice de Pobreza Multidimensional en los municipios colombianos.

2.1. Índice de Pobreza Multidimensional

El concepto de pobreza ha evolucionado más allá del ingreso mínimo necesario para cubrir necesidades básicas, reconociendo que este es insuficiente para reflejar el bienestar humano. En 2008, la comisión Sarkozy, con Stiglitz, Sen y Fitoussi, impulsó la creación de medidas complementarias, lo que llevó al desarrollo del Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) por la Universidad de Oxford. Este índice mide las privaciones en dimensiones clave como educación, salud, empleo y vivienda, y permite a cada país adaptarlo a su contexto. En Colombia, el IPM fue adoptado en 2011 por el Departamento Nacional de Planeación, y el DANE es responsable de su cálculo. El IPM no solo mide la proporción de personas en pobreza multidimensional, sino también la intensidad de las carencias que experimentan, proporcionando una visión más integral de la pobreza en el país (Angulo, 2011).

2.2. Fuentes de información Índice de Pobreza Multidimensional

La Encuesta Nacional de Calidad de Vida (ECV), realizada por el DANE, es la principal fuente de información para calcular el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) en Colombia. La ECV recoge datos sobre el bienestar de los hogares, abarcando temas como salud, educación, acceso a bienes y servicios, y condiciones de vivienda. Se realiza anualmente con representatividad nacional y regional, tanto en áreas urbanas como rurales, y su estructura incluye capítulos permanentes sobre vivienda, empleo, tecnología, salud, y educación, entre otros aspectos clave para la evaluación del bienestar.

De acuerdo con el DANE (2022), la ECV fue implementada en 1997 tras la consolidación de varias encuestas anteriores sobre pobreza y calidad de vida, con el fin de proporcionar un marco integral y estandarizado para medir el bienestar en Colombia. A lo largo del tiempo, ha evolucionado para incorporar nuevas áreas de estudio, como la Escala de Inseguridad Alimentaria (FIES) en 2022, alineándose con los Objetivos de Desarrollo Sostenible. Su aplicación anual la convierte en una herramienta clave para el diseño y evaluación de políticas públicas, asegurando cobertura nacional y desagregación regional de los datos. Para 2022, la ECV incluye diversos componentes con un enfoque en la pobreza multidimensional, tales como:

Componente	Dirigido a
Datos de la vivienda	Solo para el hogar 01 de la vivienda
Servicios del hogar	Para todos los hogares de la vivienda
Características y composición del hogar	Para todas las personas del hogar
Salud	Para todas las personas del hogar
Atención Integral de los niños y niñas menores de cinco años	Niñas y niños menores de 5 años
Educación	Para todas las personas de 5 años o más
Fuerza de trabajo	Para todas las personas de 12 años o más
Tecnologías de Información y Comunicación	Para todas las personas de 5 años o más
Trabajo Infantil	Niñas y niños menores de 5 años
Tenencia y financiación de la vivienda que ocupa el hogar	Para todos los hogares de la vivienda
Condiciones de vida del hogar y tenencia de bienes	Para todos los hogares de la vivienda
Desperdicio de alimentos	Para todos los hogares de la vivienda

Tabla 1: Componentes y destinatarios

2.3. Metodología Índice de Pobreza Multidimensional

El Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) de Colombia se calcula a partir de una matriz de privaciones a nivel de hogar. Esta matriz incluye 15 indicadores que evalúan si cada hogar enfrenta privaciones en áreas específicas. Estos indicadores se agrupan en cinco dimensiones, cada una con un peso ponderado de 0.2. Dentro de cada dimensión, las privaciones tienen igual peso, lo que significa que el impacto de las privaciones en una dimensión es proporcional al número de indicadores que contiene. Si un hogar presenta privaciones en todos los indicadores, la suma de sus pesos será 1. En cambio, si todas las privaciones se concentran en una sola dimensión, la suma de los pesos en esa dimensión será de 0.2. Esta estructura sigue la metodología de Alkire y Foster (2007, 2011a), que se basa en el enfoque de capacidades de Amartya Sen y permite evaluar la pobreza más allá de los ingresos, considerando la libertad y las oportunidades (Angulo, 2011).

Dimensión	**Indicador**	**El hogar se considera en privación si:**	**Medida - Población a la que aplica**
Condiciones educativas del hogar	Bajo logro educativo	El promedio del logro educativo de las personas de 15 años y más es menor a 9 años escolares o cuando en el hogar no se reportan personas de 15 o más años.	Escolaridad promedio de las personas de 15 años y más.
	Analfabetismo	Menos del 100 % de las personas de 15 años y más saben leer y escribir o cuando en el hogar no se reportan personas de 15 o más años.	Porcentaje de personas de 15 años y más que sabe leer y escribir.
Condiciones de la niñez y juventud	Inasistencia escolar	Menos del 100 % de los niños entre 6 y 16 años asiste al colegio.	Proporción de niños en edad escolar (de 6 a 16 años) en un hogar que asisten a un establecimiento educativo.
	Rezago escolar	Alguno de los niños entre 7 y 17 años tiene rezago escolar.	Proporción de niños entre 7 y 17 años que no tiene rezago escolar.
	Barreras a servicios para cuidado de la primera infancia	Al menos uno de los niños entre 0 y 5 años del hogar no tiene acceso simultáneo a los servicios para el cuidado integral de la primera infancia.	Porcentaje de niños entre 0 y 5 años en el hogar que tiene acceso a los servicios para el cuidado infantil.
	Trabajo Infantil	El indicador es inferior al 100 %.	Proporción de niños (5 a 17 años) que trabajan.
Mercado Laboral	Desempleo de larga duración	Un hogar en donde haya por lo menos una persona económicamente activa en desempleo de larga duración.	Porcentaje de la población económicamente activa.
	Empleo Informal	Un hogar en donde menos del 100 % de la PEA tiene trabajo formal.	Proporción de la PEA en empleo informal.

Salud	Sin aseguramiento en salud	Alguno de sus miembros no está asegurado en salud.	Porcentaje de personas en el hogar afiliadas a la Seguridad Social.
	Barreras de acceso a servicios de salud	No recibió servicios de salud cuando lo necesitó.	Porcentaje de personas que no recibieron servicios de salud.
Condiciones de la vivienda	Sin acceso a fuente de agua mejorada	Sin acceso a fuente de agua mejorada.	Cualquier miembro del hogar.
	Inadecuada eliminación de excretas	Inadecuada eliminación de excretas	Cualquier miembro del hogar
	Material inadecuado de pisos	No tiene material adecuado de pisos	Cualquier miembro del hogar
	Material inadecuado de paredes exteriores	No tiene material adecuado de paredes	Cualquier miembro del hogar
	Hacinamiento crítico	El número de personas por habitación es mayor a 3	Cualquier miembro del hogar

Tabla 2: Indicadores y dimensiones que conforman el IPM

Para identificar los hogares pobres se deben sumar los pesos de hogar:

$$i = \text{ Identifica al hogar } i$$

$$j_k = \text{ Identifica al hogar en la privación } j \text{ de la dimensión } k$$

La suma los pesos del hogar i es.

$$w_i = \sum_{j_k=1}^{J_K} w_{ij_k}$$

Así, si el peso del hogar es mayor a 0.33, el hogar se define como pobre

$$\text{si } w_i > 0.33 \text{ entonces hogar } i \text{ es pobre}$$

La Intensidad de la pobreza multidimensional es un promedio de los individuos en pobreza multidimensional y se calcula con la siguiente formula:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i * w_i}{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i}$$

Donde:

M: es el número de hogares de la muestra total.

M_P : es el número de hogares de la muestra en pobreza multidimensional.
n_i Número de personas en el hogar i.
Fex $_i$: Factor de expansión del hogar i.

Dado w_i es la suma de los pesos de 15 indicadores para el hogar i entonces se puede partir en 5 sumatorias según dimensión como sigue.

$$w_i = \sum_{j_k=1}^{J_K} w_{ij_k} = \sum_{j_1=1}^{2} w_{ij_1} + \sum_{j_2=1}^{4} w_{ij_2} + \sum_{j_3=1}^{2} w_{ij_3} + \sum_{j_4=1}^{2} w_{ij_4} + \sum_{j_5=1}^{5} w_{ij_5}$$

Lo cual se puede reescribir como:

$$w_i = w_{ij_1} + w_{ij_2} + w_{ij_3} + w_{ij_4} + w_{ij_5}$$

Retomando la fórmula de la intensidad

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i * w_i}{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i * (w_{ij_1} + w_{ij_2} + w_{ij_3} + w_{ij_4} + w_{ij_5})}{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i * w_{ij_1}}{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i} + \cdots + \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i * w_{ij_5}}{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i} \\ A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 \end{aligned}$$

Por otro lado, la tasa de incidencia se calcula como:

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{M_P} n_i * Fex_i}{\sum_{i=1}^{M} n_i * Fex_i}$$

De la cual la incidencia ajustada es:

$$H_{\text{ajustada}} = H * A$$

La cual se puede descomponer:

$$H_{\text{ajustada}} = H * (A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5)$$

Todo lo anterior se puede reestructurar de la misma manera para las 15 privaciones en vez de 5 dimensiones.

$$H_{\text{ajustada}} = H * (A_1 + A_2 + \cdots + A_{15})$$

Por último, la contribución a la incidencia ajustada de cada dimensión k se puede definir como:

$$C_k = \frac{A_k}{A}$$

Según esta medida, un hogar se clasifica como pobre si experimenta privaciones en al menos 5 de las variables seleccionadas, lo que representa el 33 % del total de privaciones.

2.4. Estimación en Áreas Pequeñas

Es un conjunto de técnicas estadísticas diseñadas para generar estimaciones precisas en subgrupos de la población, o áreas geográficas pequeñas, donde los datos disponibles a nivel de muestra son insuficientes para producir estimaciones directas confiables. Esto ocurre cuando, en el diseño de la muestra, estos dominios específicos no fueron representados de manera adecuada. Según Rao y Molina (2015), un dominio se considera pequeño cuando el tamaño de la muestra no es suficiente como para generar estimaciones directas con un nivel aceptable de precisión.

Para superar esta limitación, la metodología SAE emplea modelos que combinan la información directa obtenida de encuestas con variables auxiliares provenientes de fuentes adicionales, como censos o registros administrativos. Entre los enfoques más comunes en SAE se encuentran los modelos bayesianos y los modelos basados en regresión con efectos aleatorios, como el *EBLUP* (Empirical Best Linear Unbiased Prediction) y el *modelo Fay-Herriot*. El *EBLUP* incorpora datos auxiliares a nivel individual, mientras que el *modelo Fay-Herriot* lo hace a nivel de áreas pequeñas. Este último será el modelo utilizado en este trabajo, y su aplicación se detallará en las secciones siguientes.

2.5. Modelo Fay-Herriot

El modelo Fay-Herriot (FH), introducido por Fay y Herriot en 1979, es un modelo a nivel de áreas que permite mejorar la precisión de las estimaciones para dominios pequeños al combinar información directa con variables auxiliares a través de un enfoque de regresión con efectos aleatorios. El modelo se define matemáticamente como:

$$\hat{\theta}_d = x_d\beta + u_d + \epsilon_d \tag{1}$$

Donde:

- $\hat{\theta}_d$ es el estimador directo transformado del parámetro de interés para el área d.
- x_d es el vector de variables auxiliares correspondientes al área d.
- β es el vector de parámetros desconocidos que se estima a partir del modelo.
- u_d es el efecto aleatorio asociado a cada área, que refleja la variabilidad no explicada por las covariables.
- ϵ_d es el error aleatorio del modelo para el área d.
- $d = 1, \ldots, D$ indica el número de áreas consideradas en el análisis.

El modelo Fay-Herriot asume que el efecto aleatorio u_d sigue una distribución normal con media cero y varianza σ_u^2, y que los errores ϵ_d también están distribuidos normalmente con media cero y varianza conocida σ_d^2.

A partir de este modelo, el estimador Fay-Herriot para cada área d está dado por:

$$\bar{\theta}_d^{FH} = (1 - \hat{\gamma}_d)\,\hat{\theta}_d + \hat{\gamma}_d x_d \hat{\beta} \tag{2}$$

Donde:

- $\bar{\theta}_d^{FH}$ es la estimación del parámetro de interés para el área d utilizando el modelo Fay-Herriot.

- $\hat{\gamma}_d = \frac{\hat{\sigma}_u^2}{\sigma_d^2 + \hat{\sigma}_u^2}$ es un factor de ponderación que refleja la confianza en la estimación directa $\hat{\theta}_d$ en comparación con la estimación basada en el modelo.
- $\hat{\sigma}_u^2$ es la varianza estimada de los efectos aleatorios.

El error cuadrático medio (*MSE*, por sus siglas en inglés), que mide la precisión de las estimaciones, puede calcularse utilizando la fórmula propuesta por Prasad y Rao (1990):

$$MSE\left(\bar{\theta}_d^{FH}\right) = g_d^1 + g_d^2 + 2g_d^3 \tag{3}$$

Donde:

- $g_d^1 = \sigma_d^2(1 - \hat{\gamma}_d)$
- $g_d^2 = \hat{\gamma}_d^2 x_d^T \left(X^T V^{-1} X\right)^{-1} x_d$
- $g_d^3 = \frac{\sigma_d^4}{\left(\sigma_d^2 + \hat{\sigma}_u^2\right)^3} \operatorname{Var}\left(\hat{\sigma}_u^2\right)$

El modelo Fay-Herriot es ampliamente utilizado en el contexto de la estimación en áreas pequeñas, ya que permite mejorar la precisión de las estimaciones en dominios con información limitada, al tiempo que integra la variabilidad no observada mediante efectos aleatorios.

3. Objetivo General

Estimar el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) en Colombia para el año 2022 a nivel municipal, empleando técnicas de Estimación en Áreas Pequeñas (SAE) basadas en el Modelo Fay-Herriot.

3.1. Objetivos Específicos

1. Recopilar información auxiliar pertinente sobre la calidad de vida en Colombia para el año 2022, desglosada por municipios. Este proceso garantizará la disponibilidad de datos completos y actualizados para la aplicación del Modelo Fay-Herriot en la estimación del Índice de Pobreza Multidimensional (IPM).
2. Implementar un Modelo Fay-Herriot ajustado específicamente para la estimación del IPM en los municipios de Colombia. Esta etapa implicará la integración de la información auxiliar recopilada con los datos agregados de la Encuesta Nacional de Calidad de Vida (ECV), permitiendo obtener estimaciones más precisas de la pobreza multidimensional a nivel local.
3. Calcular los errores medios relativos de las estimaciones obtenidas para cada municipio y compararlos con las estimaciones directas. Este análisis proporcionará una evaluación de la precisión del Modelo Fay-Herriot en la estimación del IPM en comparación con otros métodos directos de medición de la pobreza multidimensional.

4. Metodología

La metodología empleada para obtener estimaciones confiables del Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) a nivel municipal se basa en el modelo Fay-Herriot. Este modelo es ampliamente utilizado para mejorar las estimaciones en encuestas por muestreo, especialmente cuando se dispone de información auxiliar adicional, lo que permite superar las limitaciones de precisión en áreas pequeñas o subgrupos de la población que no están bien representados en la muestra.

4.1. Estimación del IPM a Nivel Municipal

El proceso de estimación a nivel municipal se desarrolló en tres fases principales: estimación directa, transformación para la normalidad de los errores, y ajuste del modelo Fay-Herriot.

4.1.1. Estimación directa IPM por municipios

La estimación directa del IPM a nivel municipal se realizó utilizando los datos de la Encuesta de Calidad de Vida (ECV). Para ello, se empleó el estimador de Horvitz-Thompson, el cual permite ponderar adecuadamente las respuestas de la encuesta para reflejar la estructura de la población.
El estimador de Horvitz-Thompson se define como:

$$\hat{\theta}_d = \frac{1}{N_d} \sum_{i \in s_d} w_i y_i$$

donde:

- $\hat{\theta}_d$ es la estimación directa del IPM para el dominio d,
- w_i es el peso de expansión del hogar i,
- y_i es la variable indicadora de pobreza para el hogar i,
- N_d es la población total del dominio d,
- s_d es el conjunto de hogares en el dominio d.

La varianza de la estimación directa se calcula de la siguiente forma:

$$Var(\hat{\theta}_d) = \sum_{k \in s_d} \sum_{l \in s_d} \Delta_{kl} \frac{y_k y_l}{\pi_{kl}}$$

donde:

- $\Delta_{kl} = \pi_{kl} - \pi_k \pi_l$ es la covarianza entre las unidades k y l,
- y_k y y_l son los valores de la variable de interés (IPM) para las unidades k y l,
- π_k y π_l son las probabilidades de inclusión de las unidades k y l,
- π_{kl} es la probabilidad de inclusión conjunta de las unidades k y l.

Las estimaciones directas proporcionan una primera aproximación del IPM por municipio. No obstante, debido a las pequeñas muestras en algunos municipios, estas estimaciones presentan alta variabilidad, lo que justifica la aplicación del modelo Fay-Herriot en las siguientes fases.

4.1.2. Transformación para la normalidad de los errores

Para que el modelo Fay-Herriot sea válido, es fundamental que tanto los errores como los efectos aleatorios sigan una distribución normal. Por ello, se implementó la transformación ArcoSeno, que se utiliza frecuentemente en proporciones para normalizar las distribuciones.

La transformación ArcoSeno aplicada es la siguiente:

$$\hat{z}_d = \arcsin\left(\sqrt{\hat{\theta}_d}\right)$$

donde $\hat{\theta}_d$ es la estimación directa del IPM para el dominio d. La varianza de las estimaciones transformadas se define como se muestra a continuación:

$$Var(\hat{z}_d) = \frac{\widehat{DEFF}_d}{4 \times n_d}$$

donde:

- $\widehat{DEFF}_d$ es el factor de diseño efectivo para el dominio d,
- n_d es el tamaño de muestra efectivo para el dominio d.

Esta transformación asegura que los errores y efectos aleatorios sigan una distribución normal, lo que es esencial para realizar la estimación a través del modelo Fay-Herriot.

4.1.3. Estimación del IPM por Municipios - Modelo Fay-Herriot

El modelo Fay-Herriot se utilizó para mejorar las estimaciones del Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) a nivel municipal. Este modelo es útil cuando las estimaciones directas presentan alta variabilidad debido a tamaños de muestra pequeños. Al combinar las estimaciones directas con información auxiliar, el modelo permite reducir el error de muestreo en áreas pequeñas.
El modelo Fay-Herriot se puede definir de la siguiente forma:

$$\hat{\theta}_d = x_d^T \beta + u_d + \epsilon_d$$

donde:

- $\hat{\theta}_d$ es la estimación directa transformada para el dominio d,
- x_d^T es el vector de covariables asociadas con el dominio d,
- β es el vector de coeficientes de regresión asociados a las covariables,
- $u_d \sim \mathcal{N}(0, \sigma_u^2)$ es el efecto aleatorio que captura la variabilidad no explicada entre dominios,
- $\epsilon_d \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\epsilon_d}^2)$ es el error aleatorio de la estimación directa.

Este modelo asume que los efectos aleatorios u_d son específicos de cada dominio (en este caso, municipios) y que siguen una distribución normal con media cero y varianza σ_u^2. Los errores ϵ_d también se asumen normales, pero con varianza dependiente de la precisión de las estimaciones directas.

Combinación de estimaciones: El modelo Fay-Herriot combina la estimación directa transformada con las predicciones obtenidas de las covariables auxiliares. La estimación final para cada dominio se obtiene mediante un estimador ponderado:

$$\hat{\theta}_d = \gamma_d \hat{\theta}_d + (1 - \gamma_d)(x_d^T \beta)$$

donde:

- $\gamma_d = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_{\epsilon_d}^2}$ es el peso que determina cuánto de la estimación directa y cuánto de las predicciones auxiliares se utilizarán para el estimador final.

Este peso γ_d optimiza la combinación de ambas fuentes de información, de forma que en dominios con alta variabilidad en las estimaciones directas, el modelo dependerá más de la información auxiliar, mientras que en dominios con estimaciones directas precisas, se dará más peso a estas.

Varianza del estimador Fay-Herriot: La varianza del estimador Fay-Herriot se calcula como:

$$Var(\hat{\theta}_d) = \gamma_d Var(\hat{\theta}_d) + (1 - \gamma_d)^2 \sigma_u^2$$

Este cálculo permite ajustar la varianza en función de la precisión de las estimaciones directas y la varianza de los efectos aleatorios, lo que mejora la precisión de las estimaciones finales en los municipios.

Inversa de la Transformación ArcoSeno: Dado que las estimaciones directas del IPM fueron transformadas previamente utilizando la transformación ArcoSeno para garantizar la normalidad de los errores, se aplica la inversa de esta transformación para obtener las estimaciones finales en la escala original del IPM:

$$\hat{\theta}_d = (\sin(\mu_d))^2$$

y la varianza correspondiente se revierte con la fórmula inversa:

$$Var(\hat{\theta}_d) = 4 \times \hat{\theta}_d \times (1 - \hat{\theta}_d) \times Var(\hat{z}_d)$$

Este paso asegura que las estimaciones del IPM y su varianza puedan interpretarse nuevamente en su escala original, facilitando así su uso para la toma de decisiones a nivel municipal.

4.2. Información auxiliar para la estimación

Este apartado representa la compilación de las variables auxiliares obtenidas de diversos sistemas de información, las cuales son fundamentales para la generación de los resultados propuestos por el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM). Para garantizar la calidad y relevancia de las variables seleccionadas, se requiere un volumen considerable de información que esté relacionada directamente con la variable de estudio. La información auxiliar hace referencia a datos a nivel municipal que guardan relación con las variables de interés y que permiten mejorar el ajuste del modelo.

El proceso de recopilación de información busca consolidar un conjunto de datos sobre los municipios de Colombia, que son el foco de este estudio. En la Tabla 3 se presenta cómo cada variable auxiliar se relaciona con alguna de las dimensiones del IPM, así:

Dimensión	**Variable Auxiliar**	**Fuente**
Condiciones Educativas del Hogar	Cobertura Bruta en educación	Ministerio de Educación Nacional
	Cobertura Neta en educación	Ministerio de Educación Nacional
	Tasa de deserción escolar	Ministerio de Educación Nacional
	Tasas de aprobación escolar	Ministerio de Educación Nacional
	Tasas reprobación escolar	Ministerio de Educación Nacional
	Matrícula de población entre 5 y 16 años	Ministerio de Educación Nacional
Condiciones de la Niñez y Juventud	Porcentaje de nacidos vivos cuyas madres tienen primaria incompleta	Ministerio de Salud y Protección Social
	Porcentaje de nacidos vivos cuyas madres tienen secundaria incompleta	Ministerio de Salud y Protección Social
	Porcentaje de nacidos vivos a término con bajo peso al nacer (mujeres de 10 a 17 años)	Ministerio de Salud y Protección Social
	Tasa de fecundidad en mujeres de 10 a 17 años	Ministerio de Salud y Protección Social
Trabajo	Población total	Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE)
	Población masculina	Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE)
	Población femenina	Departamento Administrativo Nacional de Estadística (DANE)
Salud	Cobertura al sistema de salud	Ministerio de Salud y Protección Social
	Número de afiliados al sistema de salud	Ministerio de Salud y Protección Social
	Número de afiliados al régimen Subsidiado	Ministerio de Salud y Protección Social
	Número de afiliados al régimen Contributivo	Ministerio de Salud y Protección Social
	Número de afiliados al régimen Especial	Ministerio de Salud y Protección Socia
Acceso a Servicios Públicos y Condiciones de Vivienda	Índice de Riesgo de Calidad del Agua (IRCA)	Departamento Nacional de Planeación (DNP)
	Nivel de Riesgo de Calidad del Agua (IRCA)	Departamento Nacional de Planeación (DNP)
	Suscriptores a televisión	Departamento Nacional de Planeación (DNP)
	Accesos fijos a Internet	Departamento Nacional de Planeación (DNP)

Tabla 3: Variables auxiliares, dimensiones del IPM y fuentes de recolección

Inicialmente, se consideraron 22 variables auxiliares. Sin embargo, se seleccionaron 13 debido a que algunas variables presentaron alta correlación entre sí, lo que podría generar problemas de multicolinealidad en el modelo. Para abordar esta situación en el caso de un subconjunto de variables relacionadas con el sector salud (número de afiliados, personas en el régimen contributivo, subsidiado y régimen de excepción), se llevó a cabo un Análisis de Componentes Principales (PCA). Esta técnica permitió reducir la dimensionalidad de los datos, preservando la mayor parte de la información.

El análisis arrojó que la primera componente principal explicaba el 93 % de la varianza, por lo que se seleccionó esta dimensión como una variable representativa del conjunto de datos. Tras este proceso, el total de variables auxiliares se redujo a 9. Finalmente, se observó que en 189 de los 1,122 municipios había valores faltantes en alguna de las covariables, por lo que se dispuso de información completa para 933 municipios.

A continuación, se detallan las variables auxiliares seleccionadas:

1. **Cobertura bruta total en educación básica y media:** esta covariable refleja el porcentaje de estudiantes que están matriculados en los niveles de educación básica y media en relación con la población total que corresponde a la edad típica para esos niveles. Este indicador puede incluir a estudiantes de todas las edades, independientemente de si están en el grado escolar correspondiente a su edad. Donde se tiene en cuenta desde el grado Transición al grado 11.

2. **Tasa de reprobación:** esta covariable mide el porcentaje de estudiantes que no logran aprobar un grado o curso determinado en un período académico específico. Es útil para evaluar la calidad del sistema educativo y la efectividad de las instituciones educativas.

3. **Índice de Riesgo de Calidad del Agua (IRCA):** es una covariable utilizada para evaluar la calidad del agua destinada al consumo humano, especialmente en el contexto de la gestión de recursos hídricos y la salud pública. Este índice ayuda a identificar riesgos potenciales asociados con la contaminación del agua y a establecer medidas de control y prevención. El IRCA considera diversos componentes, como parámetros microbiológicos (presencia de patógenos como E. coli y coliformes fecales), químicos (contaminantes como metales pesados, nitratos y pesticidas) y físicos (turbidez, color y temperatura). El cálculo del IRCA implica ponderar estos parámetros y combinarlos en una escala que clasifica la calidad del agua en diferentes niveles de riesgo, que pueden variar desde bajo (agua segura para el consumo) hasta alto (agua no segura, que requiere intervención inmediata).

4. **Tasa de fecundidad de mujeres entre 10 y 17 años:** esta covariable demográfica mide el número de nacimientos vivos que ocurren entre mujeres en este grupo de edad durante un período específico, generalmente un año. Este indicador se expresa como el número de nacimientos por cada 1,000 mujeres en ese rango de edad.

5. **Porcentaje de nacidos vivos cuya madre tiene secudaria incompleta:** esta covariable demográfica refleja la proporción de nacimientos vivos que ocurren entre mujeres cuyas madres no han completado la educación secundaria. Este porcentaje se utiliza para analizar la relación entre el nivel educativo de las madres y los resultados de salud y bienestar infantil. Está relacionado con la salud y el bienestar de los recién nacidos, ya que la educación materna influye en prácticas de cuidado, acceso a servicios de salud y nutrición. Un alto porcentaje puede reflejar desigualdades en el acceso a la educación, lo que impacta el desarrollo social y económico de las comunidades. Además, este indicador ayuda a las autoridades a identificar áreas para intervenciones en educación y salud, subrayando la importancia de la educación materna para

mejorar los resultados infantiles. También es útil para la investigación sociodemográfica, permitiendo estudiar la relación entre la educación materna y otros factores sociales, económicos y demográficos que afectan a las familias.

6. **Porcentaje de nacidos vivos cuya madre tiene primaria incompleta**: esta covariable mide la proporción de nacimientos entre mujeres que no han completado su educación primaria, lo cual puede impactar negativamente la salud y el bienestar de los recién nacidos debido a la falta de acceso a información sobre cuidados, salud y nutrición. Un alto porcentaje puede evidenciar desigualdades en el acceso a la educación básica, perpetuando ciclos de pobreza y limitando las oportunidades de desarrollo para las mujeres. Este indicador es valioso para las autoridades en la identificación de áreas que requieren intervenciones en educación y salud, y también permite a los investigadores explorar la relación entre la educación materna y otros factores sociodemográficos que afectan a las familias y comunidades.

7. **Porcentaje de nacidos vivos con bajo peso al nacer cuya madre tiene entre 10 y 17 años:** esta covariable demográfica mide la proporción de recién nacidos que presentan un peso inferior a 2,500 gramos y cuyas madres son adolescentes en este rango de edad. Este porcentaje es crucial para evaluar la salud materno-infantil, así como las repercusiones del embarazo adolescente en los resultados de salud neonatal.

8. **Cobertura en salud:** esta covariable se refiere al acceso y disponibilidad de servicios de salud para la población, abarcando aspectos como la cobertura de servicios esenciales, protección financiera contra gastos médicos, acceso geográfico a atención y la calidad de los servicios. Es fundamental para la salud pública, ya que una mayor cobertura se asocia con mejores resultados de salud, equidad en el acceso a la atención y prevención de enfermedades. Indicadores como la tasa de vacunación, la utilización de servicios de salud y la atención prenatal son clave para evaluar esta cobertura. En resumen, la cobertura en salud es crucial para garantizar que todas las personas tengan acceso a servicios adecuados, lo que contribuye al bienestar individual y al desarrollo socioeconómico.

9. **Componentes de Afiliación en Salud:** para esta covariable, se realizó un análisis de componentes principales (PCA) en un conjunto de variables relacionadas con la salud, específicamente centradas en el número de afiliados al sistema de salud, desagregados por tipo: Contributivo, Subsidiado y Excepción Especial. Durante el análisis, se observó una fuerte correlación entre estas variables, lo que llevó a la necesidad de reducir la dimensionalidad. El resultado del PCA mostró que la primera dimensión capturaba el 93 % de la información total, lo que indica su relevancia y representatividad en el conjunto de datos. Por lo tanto, se utilizó esta dimensión como la variable que reemplazaría a las variables originales correlacionadas, facilitando así un análisis más eficiente y centrado en la información más significativa.

5. Resultados

Se estimó el IPM para 933 municipios del país, teniendo en cuenta las variables auxiliares disponibles. En el Anexo 1 se encuentran los resultados de las estimaciones del IPM a nivel municipal obtenido a partir del modelo Fay-Herriot. Para el análisis, se eliminaron los resultados de 15 municipios que obtuvieron un Coeficiente de Variación relativamente alto. De esta forma, el análisis se contempla para 918 municipios.

La estimación a nivel de municipios tiene un nivel alto de precisión para 313 dominios, que presentan un Coeficiente de Variación menor al 15 %. Esto refleja una mejora significativa respecto a las

estimaciones directas, que solo alcanzaron un Coeficiente de Variación menor al 15 % en 64 municipios. El uso del modelo Fay-Herriot permitió ampliar el número de municipios con estimaciones más precisas, lo que representa una mejora en términos de precisión y cobertura.

Al extender el umbral del Coeficiente de Variación a un valor menor al 20 %, la cantidad de dominios aumenta a 889. Esto representa un avance significativo en el análisis de información sobre la pobreza multidimensional a nivel municipal, especialmente al considerar que las estimaciones directas solo cubrían 640 municipios, debido a que los demás municipios no se incluyeron en la muestra. El modelo Fay-Herriot permitió que aquellos municipios con limitaciones en sus datos muestrales pudieran ser incluidos en el análisis, mejorando así la cobertura del estudio.

Estos resultados no solo permiten comprender mejor la situación de pobreza en cada municipio, sino que también facilitan la formulación de políticas públicas más efectivas y adaptadas a las necesidades específicas de cada región. Por ejemplo, en municipios como Cumaribo (Vichada), Uribia (La Guajira), o Manaure (La Guajira), donde la pobreza multidimensional es alarmante, se pueden diseñar programas de intervención específicos para mejorar el acceso a servicios básicos, como salud y educación.

A continuación, se presenta un mapa de Colombia que ilustra la distribución de la pobreza multidimensional a nivel municipal. Este mapa proporciona una visualización de las diferencias regionales en el Índice de Pobreza Multidimensional (IPM), permitiendo identificar las áreas más afectadas y aquellas que podrían beneficiarse de intervenciones específicas. La información geográfica presentada no solo facilita una comprensión más profunda de la situación de pobreza en el país, sino que también sirve como una herramienta valiosa para la formulación de políticas públicas orientadas a la mejora del bienestar en las comunidades más vulnerables. Adicionalmente, en el Anexo 2 se encuentra una desagregación de los mapas por departamento, lo que permite visualizar de manera más detallada los resultados a nivel municipal en aquellas áreas donde la información estuvo disponible.

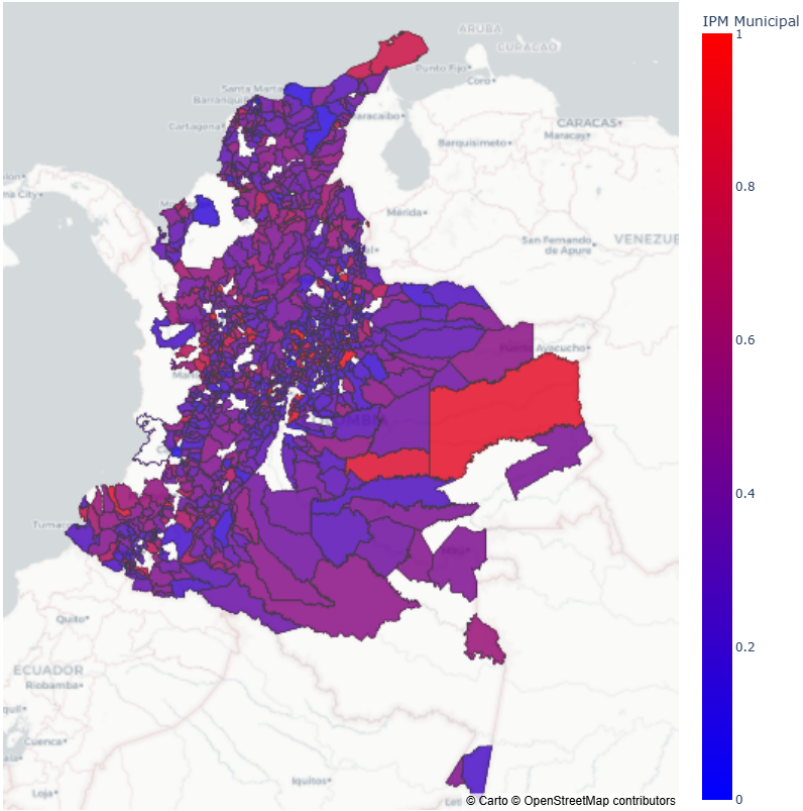

Figura 1: Mapa IPM a nivel municipal

6. Conclusiones

El uso del modelo Fay-Herriot permitió una mejora significativa en la precisión de las estimaciones del Índice de Pobreza Multidimensional (IPM) para los municipios de Colombia. Mientras que la estimación directa solo proporcionó resultados con coeficientes de variación aceptables (menores al 15 %) en 64 municipios, el modelo Fay-Herriot amplió esta cantidad a 313 municipios. Esto representa un aumento en terminos de precisión y cobertura, lo que demuestra la utilidad del enfoque de estimación en áreas pequeñas para superar las limitaciones inherentes a las muestras reducidas o insuficientes.

Además de mejorar la precisión en los municipios con datos muestrales limitados, el modelo Fay-Herriot permitió incluir un mayor número de municipios en el análisis. Mientras que las estimaciones directas cubrían 640 municipios, la estimación mediante el modelo Fay-Herriot alcanzó 933 municipios, y al aplicar un umbral del Coeficiente de Variación menor al 20 %, se lograron estimaciones confiables en 889 municipios. Esta ampliación en la cobertura es un avance importante en la medición de la pobreza multidimensional en Colombia, especialmente en zonas rurales y de difícil acceso donde la recolección de datos es compleja.

En los municipios con coeficientes de variación elevados en la estimación directa (superiores al 15 %), el modelo Fay-Herriot permitió una reducción significativa en la variabilidad de las estimaciones.

Esta mejora no solo garantiza una mayor estabilidad en los resultados, sino que también facilita la comparación entre municipios, proporcionando una base más sólida para la toma de decisiones en políticas públicas.

Los resultados obtenidos a través del modelo Fay-Herriot ofrecen una visión más detallada y precisa de la pobreza multidimensional a nivel municipal, lo que tiene importantes implicaciones para la formulación de políticas públicas. Las autoridades locales y nacionales pueden utilizar esta información para diseñar intervenciones más focalizadas en las áreas más vulnerables. Por ejemplo, los municipios con mayores niveles de pobreza multidimensional, identificados mediante el modelo, podrán recibir mayor atención en términos de acceso a educación, salud y servicios básicos.

A pesar de los avances logrados mediante el modelo Fay-Herriot, existen algunos municipios que fueron excluidos del análisis debido a su alto coeficiente de variación. Igualmente, solamente se logró realizar la estimación para 933 municipios, de los 1122 que existen en total, debido a la falta de información auxiliar disponible. Futuras investigaciones podrían enfocarse en mejorar la precisión de las estimaciones para estos municipios a través de la incorporación de variables auxiliares adicionales.

Finalmente, este estudio contribuye de manera significativa a la comprensión de la pobreza multidimensional en Colombia a nivel municipal, proporcionando un marco metodológico robusto para mejorar la precisión de las estimaciones en áreas con datos limitados. El uso del modelo Fay-Herriot y la metodología de Estimación en Áreas Pequeñas (SAE) abre la puerta para futuras aplicaciones en otros indicadores socioeconómicos, y sugiere que los modelos basados en datos auxiliares pueden desempeñar un papel crucial en la mejora de la política social en el país.

Referencias

M. P. Burgard, Esteban. A Fay–herriot model when auxiliary variables are measured with error. *Spanish Society of Statistics and Operations Research*, 29(2):166–195, March 2020.

C. W. S. Chen, F. Liu, and R. Gerlach. Desagregación de datos en encuestas de hogares: metodologías de estimación en áreas pequeñas. 2019.

DANE. Estimación e Interpretación del coeficiente de variación de la encuesta cocensal. *DANE*, pages 1–7, Junio 2008.

R. E. Fay and R. A. Herriot. Estimates of income for small places: An application of james-stein procedures to census data. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 74 (366):269–277, 1979.

S. Frhüwirth-Schnatter. Data augmentation and dynamic linear models. *Journal of Time Series Analysis*, 15(2):183–202, March 1995.

M. Ghosh and J. N. K. Rao. Small area estimation: An appraisal. *Statistical Science*, 9(1):55–76, March 1994.

H. Gutierrez. Estrategias de muestreo dise˜no de encuestas y estimación de parámetros. *Universidad Santo Tomas*, 2016.

R.-P. S. T. T. Kreutzmann, Pannier. The r package emdi for estimating and mapping regionally disaggregated indicators. *Journal of Statistical Software*, (91), 2019a.

R. Lehtonen and A. Veijanen. Design-based methods of estimation for domains and small areas. In Handbook of Statistics. Sample Surveys. Inference and Analysis. *Elsevier Scientific Publ. Co.*, 29: 219–249, 2009.

H. Li and P. Lahiri. An adjusted maximum likelihood method for solving small area estimation problems. *Journal of Multivariate Analysis*, 101(4):882–892, 2010b.

I. Molina and J. Rao. Small area estimation of poverty indicators. *Statistics and Computing*, 38(3): 369–385, 2010.

I. Molina and J. Rao. Variable Selection Via Gibbs Sampling. *Maret*, 2015a.

I. Molina and J. Rao. Small area estimation under a Fay-Herriot model with preliminary testing for the presence of random area effects. *Statistics Canada*, 2015b.

N. N. Prasad and J. N. Rao. The estimation of the mean squared error of small-area estimators. *Journal of the American statistical association.*, 85(409):163–171, 1990.

R Core Team. *R: A Language and Environment for Statistical Computing.* R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2013. URL `http://www.R-project.org/`.

N. Rojas-Perilla. The Use of Data-driven Transformations and Their Applicability in Small Area Estimation. *Freie Universitaet Berlin (Germany)*, 2018.

A. Santiago Moreno. Aportaciones a la estimación en áreas pequeñas. Estimación de proporciones. *Universidad de Granada*, 2012.

C. F. Tellez. *Estimación de áreas de áreas pequeñas utilizando imputación múliple en modelos logísticos de tres parámetros, PhD thesis.* 2020.

N. Unidas. La Agenda 2030 y los Objetivos de Desarrollo Sostenible: una oportunidad para América Latina y el Caribe. 1(1):1–93, 2018.

Z. Yang. A modified family of power transformations. *Economics Letters*, 92(1):14–19, 2006.

L. M. R. Ybarra and S. L. Lohr. *Small area estimation when auxiliary information is measured with error.*, volume 95. Biometrika., 2006.

H. Zhang and H. A. G. Rojas. Teoría estadística: aplicaciones y métodos. *Hugo Andrés Gutiérrez Rojas.*, 2010.

A. Anexos

Aquí es el apéndice donde puede poner demostraciones, códigos computacionales o resultados adicionales.

A.1. Anexo 1: Resultados estimaciones del IPM a nivel municipal mediante el modelo de Fay Herriot

Código Municipio	Nombre Municipio	Estimado	CV (%)
05002	Abejorral	0.768913	16.73
05004	Abriaquí	0.513559	22.22
05021	Alejandría	0,2572	16,969
05030	Amagá	0,3397	15,193
05031	Amalfi	0,4397	14,345
05034	Andes	0,4962	13,954
05036	Angelópolis	0,5200	16,465
05038	Angostura	0,6708	16,046
05040	Anorí	0,3738	14,618
05044	Anza	0,4421	16,044
05045	Apartadó	0,2713	15,696
05051	Arboletes	0,5910	15,536
05055	Argelia	0,4131	16,965
05059	Armenia	0,2145	17,800
05079	Barbosa	0,2457	16,079
05086	Belmira	0,4445	16,307
05088	Bello	0,2589	16,098
05091	Betania	0,8890	17,813
05093	Betulia	0,5512	13,978
05101	Ciudad Bolívar	0,5190	14,173
05107	Briceño	0,4034	14,784
05113	Buriticá	0,4921	14,255
05120	Cáceres	0,4003	15,117
05125	Caicedo	0,3124	15,629

05134	Campamento	0,5392	14,732
05138	Cañasgordas	0,3188	15,210
05142	Caracolí	0,3594	14,873
05145	Caramanta	0,4073	14,726
05147	Carepa	0,4760	14,451
05148	El Carmen de Viboral	0,6439	15,869
05154	Caucasia	0,3632	14,549
05172	Chigorodó	0,2755	15,633
05190	Cisneros	0,2542	16,017
05206	Concepción	0,7221	97,579
05209	Concordia	0,5862	13,657
05212	Copacabana	0,2256	16,377
05234	Dabeiba	0,3956	14,780
05237	Don Matías	0,4493	15,001
05240	Ebéjico	0,9028	22,564
05250	El Bagre	0,4185	14,486
05264	Entrerrios	0,3930	15,044
05282	Fredonia	0,3472	15,563
05284	Frontino	0,5592	14,696
05306	Giraldo	0,4032	14,654
05308	Girardota	0,3277	15,219
05310	Gómez Plata	0,6326	14,914
05313	Granada	0,3709	15,390
05315	Guadalupe	0,3292	15,269
05318	Guarne	0,3460	15,082
05321	Guatape	0,9269	23,418
05347	Heliconia	0,4281	17,214
05353	Hispania	0,4067	15,174
05360	Itagui	0,2541	16,219
05361	Ituango	0,5417	13,747

05364	Jardín	0,7215	14,868
05368	Jericó	0,2913	15,854
05376	La Ceja	0,2570	16,729
05380	La Estrella	0,3838	15,085
05390	La Pintada	0,2912	15,489
05400	La Unión	0,7036	16,501
05411	Liborina	0,3384	15,258
05425	Maceo	0,2930	15,873
05440	Marinilla	0,2929	15,462
05467	Montebello	0,9707	24,471
05480	Mutatá	0,6170	21,298
05483	Nariño	0,4052	15,334
05490	Necoclí	0,4670	15,058
05495	Nechí	0,5491	15,718
05501	Olaya	0,4086	16,332
05541	Peñol	0,5021	15,009
05543	Peque	0,5513	13,620
05576	Pueblorrico	0,3848	14,847
05579	Puerto Berrío	0,3298	15,057
05585	Puerto Nare	0,3753	15,016
05591	Puerto Triunfo	0,3095	15,938
05604	Remedios	0,4598	14,003
05607	Retiro	0,2850	16,048
05615	Rionegro	0,3852	17,945
05628	Sabanalarga	0,5386	13,822
05631	Sabaneta	0,1677	17,563
05642	Salgar	0,5520	14,038
05647	San Andrés de Cuerquía	0,9143	20,258
05649	San Carlos	0,2998	15,776
05652	San Francisco	0,8443	17,556

05658	San José de la Montaña	0,3937	15,973
05659	San Juan de Urabá	0,6451	7,840
05660	San Luis	0,7829	18,979
05665	San Pedro de Uraba	0,3097	15,608
05667	San Rafael	0,3240	15,040
05670	San Roque	0,3516	14,786
05674	San Vicente	0,5511	14,285
05679	Santa Bárbara	0,3500	15,195
05686	Santa Rosa de Osos	0,4084	14,824
05690	Santo Domingo	0,3255	15,685
05697	El Santuario	0,5964	15,488
05736	Segovia	0,4086	14,344
05756	Sonson	0,3792	14,500
05761	Sopetrán	0,3600	14,961
05789	Támesis	0,3007	15,681
05790	Tarazá	0,3582	14,812
05792	Tarso	0,4287	14,693
05809	Titiribí	0,5145	19,659
05819	Toledo	0,3477	14,923
05837	Turbo	0,3315	14,708
05842	Uramita	0,6570	14,396
05847	Urrao	0,4286	14,079
05854	Valdivia	0,5525	13,931
05856	Valparaíso	0,9724	25,481
05858	Vegachí	0,2461	16,209
05861	Venecia	0,3470	14,958
05873	Vigía del Fuerte	0,5771	9,147
05885	Yalí	0,6823	15,171
05890	Yolombó	0,4335	14,146
05893	Yondó	0,4439	15,847

05895	Zaragoza	0,5907	14,827
08001	Barranquilla	0,0008	-6182,946
08078	Baranoa	0,3385	15,077
08137	Campo de la Cruz	0,3033	15,316
08141	Candelaria	0,4140	14,642
08372	Juan de Acosta	0,3930	14,665
08421	Luruaco	0,4342	14,778
08433	Malambo	0,3135	15,390
08436	Manatí	0,5100	8,021
08520	Palmar de Varela	0,2884	16,616
08549	Piojó	0,7154	15,677
08558	Polonuevo	0,2551	16,391
08560	Ponedera	0,4414	14,293
08573	Puerto Colombia	0,3943	15,547
08606	Repelón	0,4493	14,655
08634	Sabanagrande	0,2478	16,564
08638	Sabanalarga	0,3768	14,886
08675	Santa Lucía	0,3664	15,026
08685	Santo Tomás	0,2889	15,718
08758	Soledad	0,1709	16,991
08770	Suan	0,2321	16,669
08832	Tubará	0,3149	16,686
08849	Usiacurí	0,3054	16,141
13006	Achí	0,6013	8,750
13030	Altos del Rosario	0,5705	15,774
13042	Arenal	0,5751	17,379
13052	Arjona	0,3273	14,806
13062	Arroyohondo	0,3485	14,852
13074	Barranco de Loba	0,3607	15,859
13140	Calamar	0,4378	14,391

13160	Cantagallo	0,6027	14,772
13188	Cicuco	0,4055	15,141
13212	Córdoba	0,4193	14,338
13222	Clemencia	0,4575	14,762
13244	El Carmen de Bolívar	0,3924	6,635
13248	El Guamo	0,3242	15,437
13268	El Peñón	0,4895	14,352
13300	Hatillo de Loba	0,3699	14,817
13430	Magangué	0,3345	16,472
13440	Margarita	0,3320	15,144
13442	María La Baja	0,5209	14,966
13458	Montecristo	0,4606	15,694
13468	Mompós	0,5005	14,300
13473	Morales	0,5407	14,309
13490	Norosí	0,6901	15,236
13549	Pinillos	0,2486	15,903
13580	Regidor	0,4506	14,959
13600	Río Viejo	0,5653	14,199
13620	San Cristóbal	0,2461	16,497
13650	San Fernando	0,5052	13,974
13655	San Jacinto del Cauca	0,5312	14,574
13667	San Martín de Loba	0,3805	15,702
13670	San Pablo	0,3618	15,530
13673	Santa Catalina	0,5423	15,204
13683	Santa Rosa	0,4758	14,717
13688	Santa Rosa del Sur	0,4538	14,874
13744	Simití	0,3853	14,532
13760	Soplaviento	0,4675	14,398
13780	Talaigua Nuevo	0,2865	16,229
13810	Tiquisio	0,5331	14,415

13836	Turbaco	0,3560	14,896
13838	Turbaná	0,2945	15,654
13873	Villanueva	0,6221	15,088
13894	Zambrano	0,2928	16,186
15001	Tunja	0,2645	16,773
15022	Almeida	0,2316	17,419
15047	Aquitania	0,9318	22,142
15051	Arcabuco	0,6989	16,424
15087	Belén	0,6430	15,516
15090	Berbeo	0,2169	17,347
15097	Boavita	0,2752	15,715
15104	Boyacá	0,2683	15,785
15106	Briceño	0,2052	17,577
15109	Buenavista	0,2074	17,816
15114	Busbanzá	0,2978	18,013
15131	Caldas	0,1792	17,374
15135	Campohermoso	0,2166	17,451
15162	Cerinza	0,3139	16,472
15172	Chinavita	0,2229	17,421
15176	Chiquinquirá	0,4477	15,827
15180	Chiscas	0,4464	19,944
15183	Chita	0,6565	15,367
15185	Chitaraque	0,3126	16,108
15187	Chivatá	0,3905	15,694
15204	Cómbita	0,2412	17,825
15215	Corrales	0,2584	17,436
15218	Covarachía	0,4678	14,590
15223	Cubará	0,6878	14,569
15224	Cucaita	0,5605	20,408
15226	Cuítiva	0,9935	39,171

15232	Chíquiza	0,3707	14,728
15238	Duitama	0,1407	17,187
15244	El Cocuy	0,2229	17,194
15272	Firavitoba	0,2431	17,701
15276	Floresta	0,1863	17,873
15296	Gameza	0,8115	17,401
15299	Garagoa	0,2465	16,275
15325	Guayatá	0,3395	15,513
15362	Iza	0,4889	20,138
15367	Jenesano	0,4016	15,107
15368	Jericó	0,4046	15,538
15377	Labranzagrande	0,4128	16,625
15380	La Capilla	0,2180	17,589
15401	La Victoria	0,3691	21,265
15403	La Uvita	0,3116	15,671
15407	Villa de Leyva	0,2596	15,800
15425	Macanal	0,2370	17,697
15442	Maripí	0,2838	16,620
15455	Miraflores	0,2765	15,796
15464	Mongua	0,2635	16,947
15466	Monguí	0,3207	15,271
15469	Moniquirá	0,3338	15,675
15476	Motavita	0,2844	15,743
15480	Muzo	0,2596	15,855
15491	Nobsa	0,8885	20,992
15494	Nuevo Colón	0,3778	16,753
15500	Oicatá	0,9848	40,427
15507	Otanche	0,2487	16,826
15514	Páez	0,2222	17,382
15516	Paipa	0,3245	15,726

15531	Pauna	0,8858	20,838
15533	Paya	0,4258	15,786
15537	Paz de Río	0,2346	17,175
15542	Pesca	0,2504	16,846
15550	Pisba	0,3111	16,089
15572	Puerto Boyacá	0,5397	15,579
15599	Ramiriquí	0,3225	15,339
15600	Ráquira	0,8803	20,056
15621	Rondón	0,5185	24,495
15632	Saboyá	0,7287	16,270
15638	Sáchica	0,4831	14,782
15646	Samacá	0,2687	15,866
15660	San Eduardo	0,5206	17,060
15664	San José de Pare	0,2592	16,670
15667	San Luis de Gaceno	0,2199	17,668
15673	San Mateo	0,1904	17,628
15676	San Miguel de Sema	0,4732	20,385
15681	San Pablo de Borbur	0,3636	14,751
15686	Santana	0,3096	15,641
15690	Santa María	0,2425	17,247
15693	Santa Rosa de Viterbo	0,2672	17,717
15696	Santa Sofía	0,3002	15,721
15720	Sativanorte	0,1962	17,680
15740	Siachoque	0,4259	15,361
15753	Soatá	0,1686	17,991
15755	Socotá	0,5986	14,888
15757	Socha	0,2400	16,060
15759	Sogamoso	0,3132	16,430
15761	Somondoco	0,4613	19,506
15763	Sotaquirá	0,4079	14,719

15764	Soracá	0,4521	17,316
15776	Sutamarchán	0,2725	16,241
15778	Sutatenza	0,2272	17,535
15790	Tasco	0,2446	16,279
15804	Tibaná	0,3420	15,424
15806	Tibasosa	0,2954	16,558
15808	Tinjacá	0,3008	16,697
15810	Tipacoque	0,1764	18,058
15814	Toca	0,2571	16,008
15816	Togüí	0,3062	15,419
15820	Tópaga	0,2883	15,769
15822	Tota	0,3134	16,511
15832	Tununguá	0,3070	16,367
15835	Turmequé	0,8747	22,462
15837	Tuta	0,2944	15,759
15839	Tutazá	0,1712	765,131
15842	Umbita	0,2608	16,867
15861	Ventaquemada	0,5099	14,324
15879	Viracachá	0,4622	18,104
15897	Zetaquira	0,2895	15,516
17001	Manizales	0,1625	16,775
17013	Aguadas	0,5818	14,202
17042	Anserma	0,5228	14,076
17050	Aranzazu	0,3228	15,508
17088	Belalcázar	0,3949	14,500
17174	Chinchiná	0,4183	14,905
17272	Filadelfia	0,6319	14,679
17380	La Dorada	0,3208	15,131
17388	La Merced	0,5258	17,572
17433	Manzanares	0,3221	15,335

17442	Marmato	0,4000	14,969
17444	Marquetalia	0,3075	15,831
17486	Neira	0,3269	15,735
17495	Norcasia	0,4494	14,892
17513	Pácora	0,3363	15,361
17524	Palestina	0,5568	13,768
17614	Riosucio	0,3113	15,154
17616	Risaralda	0,5923	14,921
17653	Salamina	0,2895	15,561
17665	San José	0,3519	14,857
17777	Supía	0,3132	15,327
17867	Victoria	0,3327	15,650
17873	Villamaría	0,4269	15,728
17877	Viterbo	0,2263	17,121
18001	Florencia	0,1817	2,974
18029	Albania	0,2842	15,639
18094	Belén de los Andaquies	0,4007	14,658
18150	Cartagena del Chairá	0,4946	14,003
18205	Curillo	0,4917	14,498
18247	El Doncello	0,5150	14,595
18256	El Paujil	0,3232	15,190
18410	La Montañita	0,3956	14,651
18460	Milán	0,3414	15,027
18479	Morelia	0,2990	17,012
18592	Puerto Rico	0,5259	13,890
18610	San José del Fragua	0,3876	14,524
18753	San Vicente del Caguán	0,3982	14,506
18756	Solano	0,5138	14,287
18785	Solita	0,6219	15,369
18860	Valparaíso	0,5244	16,551

19022	Almaguer	0,6399	13,977
19050	Argelia	0,5818	6,962
19075	Balboa	0,4604	6,580
19100	Bolívar	0,4111	14,242
19110	Buenos Aires	0,6074	13,806
19137	Caldono	0,5850	13,827
19142	Caloto	0,5081	13,963
19212	Corinto	0,4864	14,399
19256	El Tambo	0,5431	13,817
19290	Florencia	0,4028	14,974
19300	Guachené	0,2507	17,001
19318	Guapi	0,5899	14,106
19355	Inzá	0,4573	14,190
19364	Jambaló	0,4496	14,312
19392	La Sierra	0,2594	15,975
19397	La Vega	0,4959	15,132
19450	Mercaderes	0,5250	7,468
19455	Miranda	0,2826	15,662
19473	Morales	0,3816	15,639
19513	Padilla	0,7803	17,186
19517	Paez	0,4291	6,798
19532	Patía	0,4986	13,832
19533	Piamonte	0,6534	15,396
19585	Puracé	0,3862	14,683
19622	Rosas	0,8471	19,626
19698	Santander de Quilichao	0,3482	14,473
19701	Santa Rosa	0,2198	17,579
19743	Silvia	0,5117	13,896
19780	Suárez	0,4542	15,354
19785	Sucre	0,3551	15,180

19807	Timbío	0,4976	14,112
19821	Toribio	0,3539	14,641
19824	Totoró	0,6786	13,974
19845	Villa Rica	0,4070	14,988
20001	Valledupar	0,1319	2,937
20011	Aguachica	0,3351	14,550
20013	Agustín Codazzi	0,4485	14,546
20032	Astrea	0,4007	14,433
20045	Becerril	0,5470	15,151
20060	Bosconia	0,4207	14,582
20175	Chimichagua	0,3751	14,866
20178	Chiriguaná	0,5345	14,814
20228	Curumaní	0,4331	14,257
20238	El Copey	0,4078	14,346
20250	El Paso	0,4420	14,120
20295	Gamarra	0,4307	14,609
20310	González	0,8159	18,359
20383	La Gloria	0,3373	15,611
20400	La Jagua de Ibirico	0,3951	14,566
20517	Pailitas	0,3326	14,918
20550	Pelaya	0,5209	14,175
20570	Pueblo Bello	0,2206	17,272
20621	La Paz	0,4233	14,491
20710	San Alberto	0,3440	14,840
20750	San Diego	0,4873	14,651
20770	San Martín	0,2993	15,419
20787	Tamalameque	0,4631	14,968
23001	Montería	0,1609	3,158
25001	Agua de Dios	0,4835	15,465
25019	Albán	0,9592	24,420

25035	Anapoima	0,2727	16,677
25053	Arbeláez	0,2907	15,978
25095	Bituima	0,2849	18,035
25099	Bojacá	0,1466	908,916
25120	Cabrera	0,2925	16,208
25123	Cachipay	0,6629	15,786
25126	Cajicá	0,5240	15,241
25148	Caparrapí	0,2849	16,035
25151	Caqueza	0,2359	16,217
25154	Carmen de Carupa	0,6499	15,620
25168	Chaguaní	0,3954	16,191
25175	Chía	0,3727	16,060
25178	Chipaque	0,6837	16,628
25181	Choachí	0,9396	23,807
25183	Chocontá	0,2539	16,189
25200	Cogua	0,7297	17,016
25224	Cucunubá	0,3295	15,595
25245	El Colegio	0,4442	14,650
25258	El Peñón	0,4978	24,798
25260	El Rosal	0,3963	14,830
25279	Fomeque	0,2610	16,196
25281	Fosca	0,4710	17,592
25286	Funza	0,3354	15,475
25288	Fúquene	0,2753	16,622
25290	Fusagasugá	0,1689	16,542
25293	Gachala	0,2717	16,764
25295	Gachancipá	0,2984	17,260
25297	Gachetá	0,2095	16,911
25307	Girardot	0,2170	17,150
25312	Granada	0,2677	15,885

25317	Guachetá	0,4797	14,380
25320	Guaduas	0,4963	14,886
25322	Guasca	0,2506	17,034
25324	Guataquí	0,9391	23,631
25326	Guatavita	0,3354	16,203
25328	Guayabal de Siquima	0,4215	17,871
25335	Guayabetal	0,3878	15,258
25339	Gutiérrez	0,9065	22,597
25368	Jerusalén	0,2211	17,476
25372	Junín	0,2084	17,858
25394	La Palma	0,4329	16,929
25398	La Peña	0,4119	16,756
25402	La Vega	0,2700	16,034
25407	Lenguazaque	0,3526	15,232
25426	Macheta	0,2896	16,034
25430	Madrid	0,4355	15,095
25438	Medina	0,2684	16,643
25473	Mosquera	0,3009	16,268
25483	Nariño	0,2163	17,240
25486	Nemocón	0,5578	14,811
25488	Nilo	0,3108	18,875
25491	Nocaima	0,3060	16,581
25506	Venecia	0,2999	15,497
25513	Pacho	0,4342	14,442
25518	Paime	0,2095	17,793
25524	Pandi	0,3517	16,268
25530	Paratebueno	0,3545	15,540
25535	Pasca	0,2649	16,868
25572	Puerto Salgar	0,3261	16,786
25580	Pulí	0,3463	16,701

25592	Quebradanegra	0,6493	27,648
25594	Quetame	0,2444	16,381
25596	Quipile	0,9028	20,277
25599	Apulo	0,3501	16,214
25612	Ricaurte	0,3538	16,699
25645	San Antonio del Tequendama	0,7714	16,985
25649	San Bernardo	0,2962	16,014
25653	San Cayetano	0,0941	1454,212
25658	San Francisco	0,2035	17,819
25662	San Juan de Río Seco	0,2231	17,369
25718	Sasaima	0,2543	16,814
25736	Sesquilé	0,5453	14,315
25745	Simijaca	0,9805	26,672
25754	Soacha	0,3209	16,603
25769	Subachoque	0,2414	17,656
25772	Suesca	0,2964	15,740
25777	Supatá	0,2367	18,040
25779	Susa	0,6913	15,717
25781	Sutatausa	0,9753	42,241
25785	Tabio	0,4907	14,631
25793	Tausa	0,3037	16,058
25797	Tena	0,3380	17,119
25799	Tenjo	0,2776	16,021
25805	Tibacuy	0,9740	41,926
25815	Tocaima	0,6511	15,611
25817	Tocancipá	0,3730	15,188
25823	Topaipí	0,4483	14,832
25839	Ubalá	0,3601	16,382
25841	Ubaque	0,2836	16,340
25845	Une	0,6923	15,700

25851	Útica	0,2393	17,438
25862	Vergara	0,3494	15,196
25867	Vianí	0,3120	16,290
25873	Villapinzón	0,2850	16,065
25878	Viotá	0,2744	16,447
25885	Yacopí	0,4434	14,925
25898	Zipacón	0,3268	16,465
25899	Zipaquirá	0,2921	15,579
27001	Quibdó	0,2399	3,523
27413	Lloró	0,6941	15,927
27787	Tadó	0,5726	14,120
27810	Unión Panamericana	0,4236	16,005
41001	Neiva	0,1673	16,597
41006	Acevedo	0,3978	15,660
41013	Agrado	0,4544	14,255
41016	Aipe	0,5229	13,921
41020	Algeciras	0,4040	14,451
41026	Altamira	0,3314	15,846
41078	Baraya	0,3478	15,109
41132	Campoalegre	0,3823	14,466
41206	Colombia	0,3206	15,856
41244	Elías	0,8080	17,920
41298	Garzón	0,3218	15,016
41306	Gigante	0,4363	14,714
41319	Guadalupe	0,4015	14,717
41349	Hobo	0,3302	15,333
41357	Iquira	0,4986	14,149
41359	Isnos	0,6090	14,543
41378	La Argentina	0,3643	14,930
41396	La Plata	0,3274	14,795

41483	Nátaga	0,5182	14,559
41503	Oporapa	0,4683	13,936
41518	Paicol	0,2187	17,557
41524	Palermo	0,6732	15,631
41530	Palestina	0,6312	14,063
41548	Pital	0,4643	13,908
41551	Pitalito	0,2834	15,494
41615	Rivera	0,3560	15,812
41660	Saladoblanco	0,5168	14,790
41668	San Agustín	0,6492	14,903
41676	Santa María	0,3479	14,979
41770	Suaza	0,6175	14,557
41791	Tarqui	0,4663	13,955
41797	Tesalia	0,4070	14,962
41799	Tello	0,3827	14,983
41801	Teruel	0,3737	15,250
41807	Timaná	0,3409	15,194
41872	Villavieja	0,4498	15,188
44001	Riohacha	0,2993	3,065
44035	Albania	0,3328	15,641
44078	Barrancas	0,3928	14,757
44090	Dibulla	0,4455	6,202
44098	Distracción	0,4878	14,563
44110	El Molino	0,5585	14,498
44279	Fonseca	0,2926	15,415
44378	Hatonuevo	0,5733	14,531
44420	La Jagua del Pilar	0,8381	18,825
44430	Maicao	0,4003	3,642
44560	Manaure	0,7557	3,489
44650	San Juan del Cesar	0,2666	15,685

44847	Uribia	0,7774	2,631
44855	Urumita	0,4379	14,660
44874	Villanueva	0,3491	14,962
47001	Santa Marta	0,1355	3,102
47030	Algarrobo	0,4106	14,391
47053	Aracataca	0,3844	14,955
47058	Ariguaní	0,5190	15,136
47161	Cerro San Antonio	0,2976	15,720
47189	Ciénaga	0,3238	14,744
47205	Concordia	0,2996	15,704
47245	El Banco	0,3766	14,459
47258	El Piñon	0,3112	15,986
47268	El Retén	0,3794	16,378
47288	Fundación	0,3048	15,787
47318	Guamal	0,3994	14,252
47460	Nueva Granada	0,4251	15,225
47541	Pedraza	0,2586	16,645
47545	Pijiño del Carmen	0,4199	14,564
47551	Pivijay	0,3693	14,863
47555	Plato	0,5011	14,506
47570	Puebloviejo	0,5103	14,626
47605	Remolino	0,3000	16,778
47660	Sabanas de San Angel	0,4857	14,408
47675	Salamina	0,4724	14,216
47692	San Sebastián de Buenavista	0,4633	14,572
47703	San Zenón	0,4274	15,499
47720	Santa Bárbara de Pinto	0,4834	13,927
47745	Sitionuevo	0,3885	15,338
47798	Tenerife	0,4624	15,247
47960	Zapayán	0,5880	14,006

47980	Zona Bananera	0,4761	15,752
50006	Acacías	0,3432	15,016
50110	Barranca de Upía	0,3248	15,221
50124	Cabuyaro	0,5409	14,844
50150	Castilla La Nueva	0,2369	16,332
50226	Cumaral	0,2459	15,997
50245	El Calvario	0,4411	19,202
50251	El Castillo	0,4131	15,044
50270	El Dorado	0,3056	15,564
50287	Fuente de Oro	0,4575	14,087
50313	Granada	0,3696	14,707
50318	Guamal	0,2050	16,889
50325	Mapiripán	0,8563	17,930
50330	Mesetas	0,3225	15,233
50350	La Macarena	0,4054	16,528
50400	Lejanías	0,2333	16,482
50450	Puerto Concordia	0,3225	15,249
50568	Puerto Gaitán	0,3987	15,829
50573	Puerto López	0,3133	15,266
50577	Puerto Lleras	0,2876	15,704
50590	Puerto Rico	0,3172	15,032
50606	Restrepo	0,2694	16,147
50680	San Carlos de Guaroa	0,3169	15,282
50683	San Juan de Arama	0,3484	15,364
50686	San Juanito	0,2109	18,520
50689	San Martín	0,5219	14,255
50711	Vistahermosa	0,4133	14,547
52019	Albán	0,3216	17,670
52022	Aldana	0,1531	18,659
52036	Ancuyá	0,1974	17,747

52051	Arboleda	0,2621	16,792
52079	Barbacoas	0,4753	14,182
52083	Belén	0,1985	17,556
52110	Buesaco	0,7087	16,559
52203	Colón	0,2568	17,129
52207	Consaca	0,3321	15,772
52210	Contadero	0,3792	16,675
52215	Córdoba	0,5992	15,503
52227	Cumbal	0,2574	16,259
52233	Cumbitara	0,2198	18,294
52240	Chachagüí	0,3389	15,497
52250	El Charco	0,4892	14,195
52254	El Peñol	0,3183	16,673
52256	El Rosario	0,4511	15,590
52258	El Tablón de Gómez	0,5823	15,205
52317	Guachucal	0,2397	16,270
52320	Guaitarilla	0,2927	16,295
52323	Gualmatán	0,2200	17,321
52352	Iles	0,3456	15,747
52356	Ipiales	0,3512	15,838
52381	La Florida	0,2540	16,809
52385	La Llanada	0,3218	15,464
52399	La Unión	0,2823	15,816
52405	Leiva	0,5264	14,242
52411	Linares	0,2422	16,948
52418	Los Andes	0,2878	15,855
52427	Magüi	0,5239	7,919
52435	Mallama	0,2364	17,241
52480	Nariño	0,2827	16,332
52490	Olaya Herrera	0,5806	8,883

52506	Ospina	0,2735	16,750
52520	Francisco Pizarro	0,7589	7,838
52540	Policarpa	0,4315	16,187
52560	Potosí	0,2339	18,513
52573	Puerres	0,7875	19,167
52585	Pupiales	0,5921	16,122
52612	Ricaurte	0,6587	15,027
52621	Roberto Payán	0,6103	14,092
52678	Samaniego	0,4348	15,037
52685	San Bernardo	0,2908	16,022
52687	San Lorenzo	0,3479	15,029
52693	San Pablo	0,2321	16,770
52694	San Pedro de Cartago	0,2585	17,028
52696	Santa Bárbara	0,8477	16,282
52699	Santacruz	0,3079	15,818
52720	Sapuyes	0,8855	20,556
52786	Taminango	0,2551	16,300
52788	Tangua	0,3231	15,542
52835	San Andres de Tumaco	0,2834	3,518
52838	Túquerres	0,1851	17,420
52885	Yacuanquer	0,3023	15,826
54003	Abrego	0,5545	7,031
54051	Arboledas	0,2608	16,869
54099	Bochalema	0,2901	15,955
54109	Bucarasica	0,3256	16,303
54125	Cácota	0,3869	15,940
54128	Cachirá	0,3117	15,937
54172	Chinácota	0,2922	15,685
54174	Chitagá	0,5885	7,638
54206	Convención	0,5627	13,698

54223	Cucutilla	0,6663	15,594
54239	Durania	0,2996	15,270
54245	El Carmen	0,6014	13,982
54250	El Tarra	0,5174	7,394
54261	El Zulia	0,3962	14,304
54313	Gramalote	0,2968	16,046
54344	Hacarí	0,5649	13,936
54347	Herrán	0,3686	16,704
54377	Labateca	0,2521	16,369
54385	La Esperanza	0,3593	15,021
54398	La Playa	0,6750	15,182
54405	Los Patios	0,3446	15,103
54418	Lourdes	0,2845	15,787
54480	Mutiscua	0,2902	15,797
54498	Ocaña	0,3345	14,723
54518	Pamplona	0,4012	14,792
54520	Pamplonita	0,2918	16,427
54553	Puerto Santander	0,8894	23,407
54599	Ragonvalia	0,2055	17,784
54670	San Calixto	0,3679	14,603
54673	San Cayetano	0,2903	16,519
54680	Santiago	0,2258	17,410
54720	Sardinata	0,5740	13,674
54743	Silos	0,3856	15,065
54800	Teorama	0,3912	15,414
54810	Tibú	0,3318	5,488
54820	Toledo	0,3142	15,696
54871	Villa Caro	0,4340	15,527
63001	Armenia	0,4494	14,446
63111	Buenavista	0,4085	15,634

63190	Circasia	0,4591	14,539
63212	Córdoba	0,3806	15,931
63272	Filandia	0,2439	17,097
63302	Génova	0,3852	15,665
63401	La Tebaida	0,2865	15,386
63470	Montenegro	0,4495	14,803
63548	Pijao	0,4300	14,833
63594	Quimbaya	0,3953	14,331
63690	Salento	0,2550	18,034
66001	Pereira	0,1850	17,617
66045	Apía	0,2637	15,821
66075	Balboa	0,2349	17,735
66088	Belén de Umbría	0,4268	14,441
66318	Guática	0,3001	15,365
66383	La Celia	0,6322	15,406
66400	La Virginia	0,3140	17,287
66440	Marsella	0,5655	13,680
66456	Mistrató	0,7352	15,607
66572	Pueblo Rico	0,7759	16,792
66594	Quinchía	0,4248	14,440
66682	Santa Rosa de Cabal	0,2559	15,667
66687	Santuario	0,5018	13,987
68001	Bucaramanga	0,0270	-19,149
68020	Albania	0,2373	17,301
68051	Aratoca	0,6607	16,666
68077	Barbosa	0,3952	14,526
68079	Barichara	0,3201	15,914
68081	Barrancabermeja	0,2174	16,318
68092	Betulia	0,7068	16,587
68101	Bolívar	0,2127	16,620

68147	Capitanejo	0,6520	16,682
68152	Carcasí	0,2409	16,673
68162	Cerrito	0,7124	16,318
68167	Charalá	0,2771	15,701
68176	Chima	0,2550	17,358
68179	Chipatá	0,4895	16,340
68190	Cimitarra	0,4211	14,221
68207	Concepción	0,1556	849,218
68209	Confines	0,6914	101,594
68211	Contratación	0,2442	16,446
68217	Coromoro	0,3254	15,492
68229	Curití	0,2586	16,953
68235	El Carmen de Chucurí	0,3628	15,197
68250	El Peñón	0,2312	17,054
68255	El Playón	0,4504	14,350
68264	Encino	0,3140	16,575
68271	Florián	0,2466	16,150
68296	Galán	0,2745	17,599
68298	Gambita	0,2577	16,765
68307	Girón	0,3079	15,237
68318	Guaca	0,2886	15,777
68320	Guadalupe	0,2327	17,255
68322	Guapotá	0,2492	17,368
68324	Guavatá	0,2706	16,762
68327	Güepsa	0,3424	15,310
68344	Hato	0,3089	16,252
68377	La Belleza	0,3106	16,058
68385	Landázuri	0,2562	16,169
68397	La Paz	0,2285	17,224
68418	Los Santos	0,6192	14,414

68425	Macaravita	0,3872	16,482
68432	Málaga	0,5035	15,838
68444	Matanza	0,7047	16,368
68464	Mogotes	0,2977	15,942
68468	Molagavita	0,7755	18,285
68498	Ocamonte	0,3433	15,308
68500	Oiba	0,2958	15,380
68502	Onzaga	0,3933	14,697
68522	Palmar	0,4824	16,707
68524	Palmas del Socorro	0,3645	14,925
68533	Páramo	0,3421	14,984
68547	Piedecuesta	0,2525	15,823
68572	Puente Nacional	0,2440	16,875
68573	Puerto Parra	0,5080	16,226
68575	Puerto Wilches	0,4617	14,046
68615	Rionegro	0,2738	17,393
68655	Sabana de Torres	0,3222	14,866
68669	San Andrés	0,3622	14,753
68679	San Gil	0,2253	16,979
68682	San Joaquín	0,1892	17,795
68684	San José de Miranda	0,2516	16,986
68686	San Miguel	0,1733	17,898
68705	Santa Bárbara	0,0797	1736,786
68720	Santa Helena del Opón	0,3278	16,632
68745	Simacota	0,3298	15,510
68755	Socorro	0,3895	14,948
68770	Suaita	0,2979	15,706
68773	Sucre	0,9796	27,657
68780	Suratá	0,2021	17,757
68820	Tona	0,8533	18,308

68855	Valle de San José	0,2284	17,260
68861	Vélez	0,3068	15,696
68872	Villanueva	0,2892	16,018
68895	Zapatoca	0,2083	17,030
70001	Sincelejo	0,1561	3,137
70110	Buenavista	0,2723	15,893
70124	Caimito	0,4960	14,840
70204	Coloso	0,5388	14,654
70215	Corozal	0,3233	14,765
70221	Coveñas	0,5513	14,581
70230	Chalán	0,1782	17,864
70233	El Roble	0,7167	15,439
70235	Galeras	0,5951	14,954
70265	Guaranda	0,4974	16,115
70400	La Unión	0,3003	15,431
70418	Los Palmitos	0,5511	14,375
70429	Majagual	0,3301	14,954
70473	Morroa	0,4199	14,596
70508	Ovejas	0,3493	14,855
70523	Palmito	0,5069	8,080
70670	Sampués	0,5746	14,404
70678	San Benito Abad	0,5343	14,537
70702	San Juan de Betulia	0,3612	15,026
70708	San Marcos	0,3861	5,863
70713	San Onofre	0,3339	6,295
70717	San Pedro	0,3945	15,020
70771	Sucre	0,6983	15,322
70820	Santiago de Tolú	0,3775	15,559
70823	Tolú Viejo	0,4934	14,143
73024	Alpujarra	0,3379	16,011

73026	Alvarado	0,2845	15,859
73030	Ambalema	0,2381	17,080
73043	Anzoátegui	0,2892	15,544
73055	Armero	0,2502	16,744
73124	Cajamarca	0,4367	14,018
73148	Carmen de Apicalá	0,2830	16,248
73152	Casabianca	0,2793	15,930
73168	Chaparral	0,4518	13,990
73200	Coello	0,2534	17,641
73217	Coyaima	0,4056	15,172
73226	Cunday	0,3311	15,271
73236	Dolores	0,2630	16,570
73268	Espinal	0,2391	16,148
73270	Falan	0,5841	15,057
73275	Flandes	0,3437	17,539
73283	Fresno	0,5923	14,171
73319	Guamo	0,4080	14,419
73347	Herveo	0,3932	15,225
73349	Honda	0,6894	17,674
73352	Icononzo	0,3740	15,169
73408	Lérida	0,2839	15,975
73411	Líbano	0,6234	15,405
73449	Melgar	0,2916	16,101
73461	Murillo	0,4040	15,183
73483	Natagaima	0,3655	15,490
73504	Ortega	0,4991	14,254
73520	Palocabildo	0,5210	13,823
73547	Piedras	0,3281	16,900
73555	Planadas	0,4657	14,895
73563	Prado	0,2919	15,448

73585	Purificación	0,2516	15,824
73616	Rioblanco	0,5043	14,147
73622	Roncesvalles	0,4014	14,984
73624	Rovira	0,4289	14,387
73671	Saldaña	0,3587	14,851
73675	San Antonio	0,5140	14,249
73678	San Luis	0,2570	16,596
73686	Santa Isabel	0,4803	15,301
73770	Suárez	0,2945	16,648
73854	Valle de San Juan	0,2551	17,079
73861	Venadillo	0,5675	15,154
73870	Villahermosa	0,6102	13,999
73873	Villarica	0,2179	17,296
76001	Cali	0,0947	-164,044
76036	Andalucía	0,2689	16,188
76041	Ansermanuevo	0,5643	14,194
76054	Argelia	0,3611	14,826
76100	Bolívar	0,2924	15,515
76109	Buenaventura	0,2780	15,339
76111	Guadalajara de Buga	0,3253	15,811
76113	Bugalagrande	0,4480	15,332
76122	Caicedonia	0,2534	15,977
76126	Calima	0,5082	15,318
76130	Candelaria	0,4192	15,092
76233	Dagua	0,3181	15,427
76246	El Cairo	0,4318	14,705
76248	El Cerrito	0,3242	15,751
76250	El Dovio	0,4047	15,605
76275	Florida	0,2563	16,044
76306	Ginebra	0,3751	15,267

76318	Guacarí	0,3342	15,587
76377	La Cumbre	0,6467	15,575
76403	La Victoria	0,4115	20,212
76497	Obando	0,3208	15,284
76520	Palmira	0,2270	16,060
76563	Pradera	0,4128	14,956
76606	Restrepo	0,2844	16,181
76616	Riofrío	0,7724	17,082
76622	Roldanillo	0,2136	16,622
76670	San Pedro	0,2025	16,950
76736	Sevilla	0,3724	14,536
76823	Toro	0,2614	15,860
76828	Trujillo	0,4605	14,354
76834	Tuluá	0,2846	15,666
76845	Ulloa	0,2679	16,870
76863	Versalles	0,2886	15,601
76869	Vijes	0,5915	15,992
76890	Yotoco	0,2820	15,681
76895	Zarzal	0,1986	16,839
81001	Arauca	0,2673	3,525
81065	Arauquita	0,2077	4,170
81220	Cravo Norte	0,4657	16,896
81300	Fortul	0,4844	14,267
81591	Puerto Rondón	0,3074	15,768
81736	Saravena	0,3570	14,732
81794	Tame	0,3648	15,004
85001	Yopal	0,1912	16,216
85010	Aguazul	0,2490	16,045
85015	Chameza	0,1725	758,687
85125	Hato Corozal	0,3087	15,250

85139	Maní	0,5075	14,471
85162	Monterrey	0,5836	15,103
85225	Nunchía	0,4332	14,560
85230	Orocué	0,4154	14,646
85250	Paz de Ariporo	0,3285	14,796
85263	Pore	0,3334	15,020
85279	Recetor	0,2461	17,597
85315	Sácama	0,3168	16,450
85325	San Luis de Palenque	0,4770	14,906
85400	Támara	0,3285	15,621
85410	Tauramena	0,2462	16,062
85430	Trinidad	0,4451	14,052
85440	Villanueva	0,3245	15,263
86320	Orito	0,4766	14,151
86568	Puerto Asís	0,2473	3,786
86569	Puerto Caicedo	0,4551	14,029
86571	Puerto Guzmán	0,3049	4,995
86573	Leguízamo	0,3743	15,109
86749	Sibundoy	0,1851	17,618
86755	San Francisco	0,2498	16,469
86757	San Miguel	0,3996	5,817
86760	Santiago	0,5388	14,561
86865	Valle del Guamuez	0,4683	14,041
86885	Villagarzón	0,3810	14,485
88001	San Andrés	0,0908	2,603
91001	Leticia	0,2446	3,008
91540	Puerto Nariño	0,4700	14,501
94001	Inírida	0,4414	2,121
95001	San José del Guaviare	0,2711	2,301
95015	Calamar	0,3071	5,096

95025	El Retorno	0,4510	15,019
95200	Miraflores	0,4012	6,896
97001	Mitú	0,4624	2,478
97161	Caruru	0,4843	5,799
97666	Taraira	0,5739	14,818
99524	La Primavera	0,5150	5,778
99624	Santa Rosalía	0,3912	5,755
99773	Cumaribo	0,8950	1,966

A.2. Anexo 2: Mapas estimación del IPM a nivel municipal por departamento

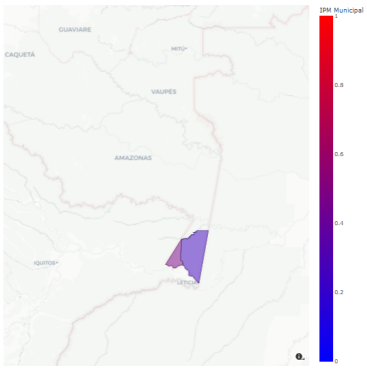

Figura 2: Amazonas

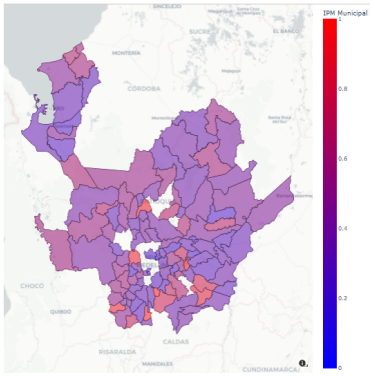

Figura 3: Antioquia

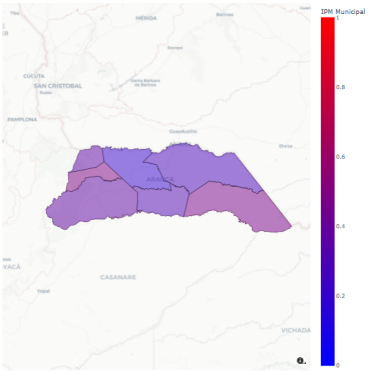

Figura 4: Arauca

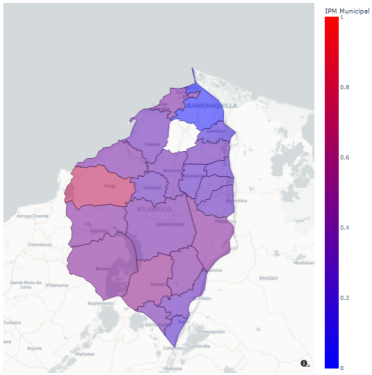

Figura 5: Atlántico

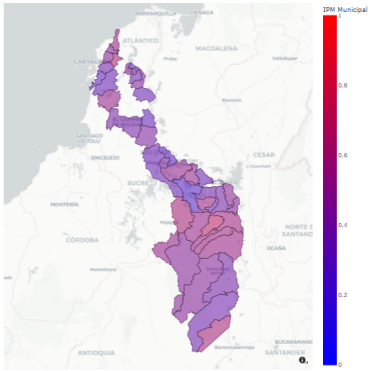

Figura 6: Bolivar

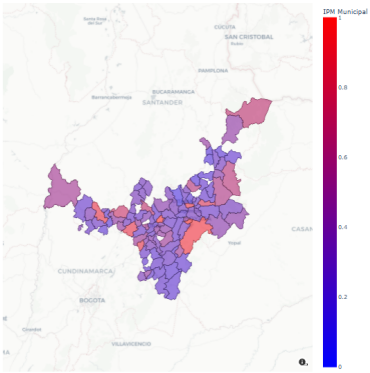

Figura 7: Boyacá

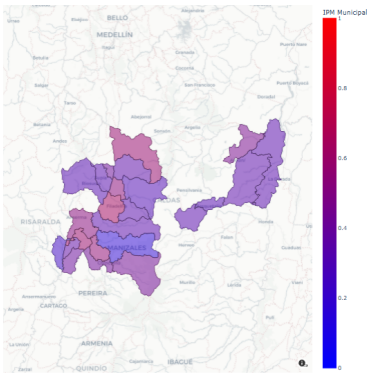

Figura 8: Caldas

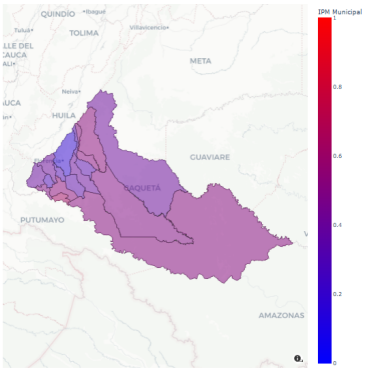

Figura 9: Caquetá

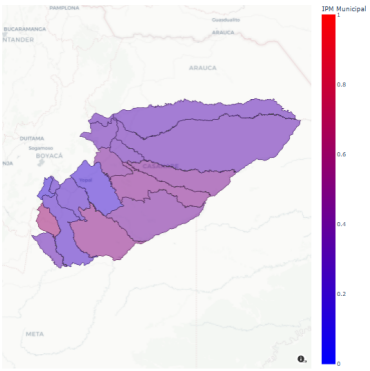

Figura 10: Casanare

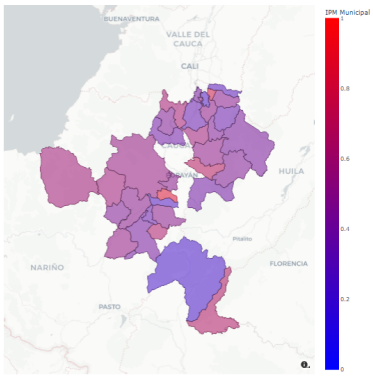

Figura 11: Cauca

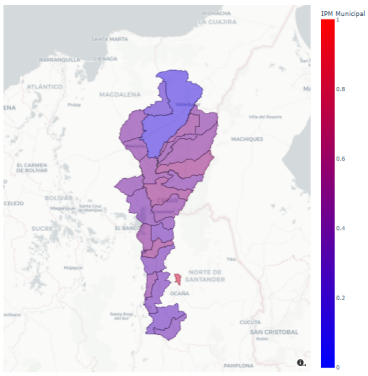

Figura 12: Cesar

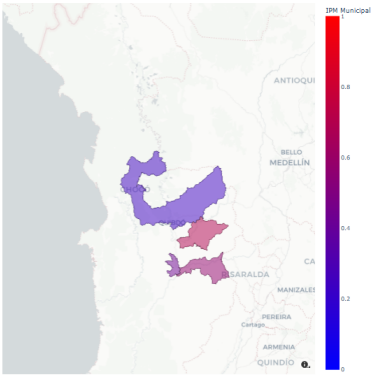

Figura 13: Chocó

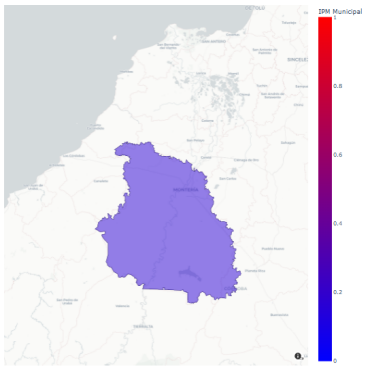

Figura 14: Córdoba

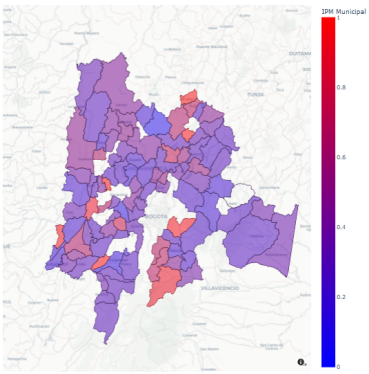

Figura 15: Cundinamarca

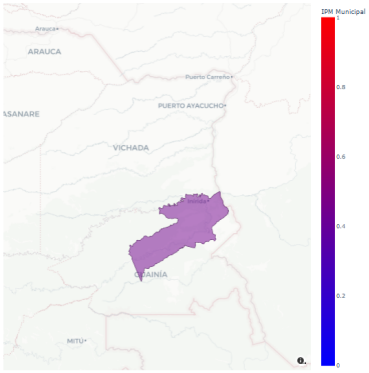

Figura 16: Guainía

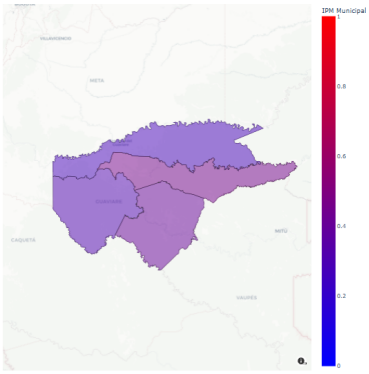

Figura 17: Guaviare

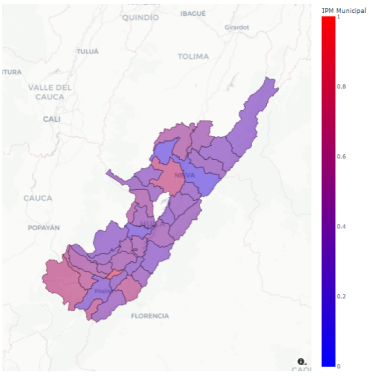

Figura 18: Huila

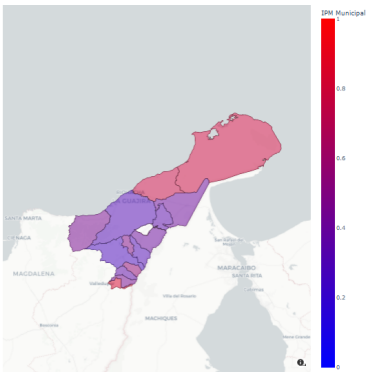

Figura 19: La Guajira

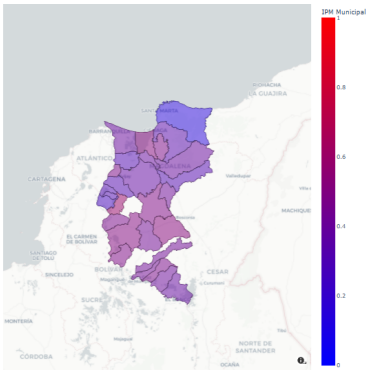

Figura 20: Magdalena

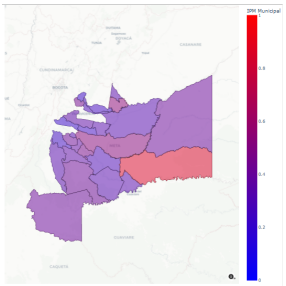

Figura 21: Meta

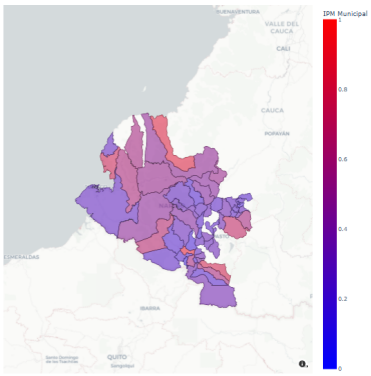

Figura 22: Nariño

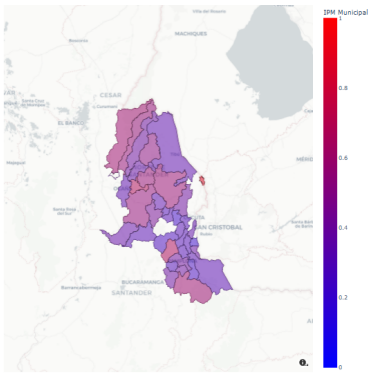

Figura 23: Norte de Santander

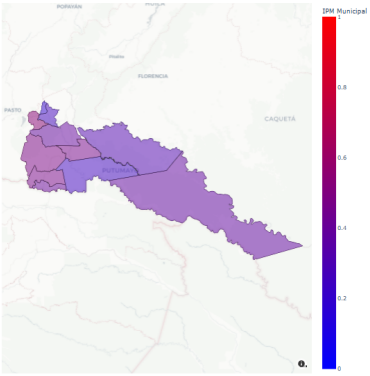

Figura 24: Putumayo

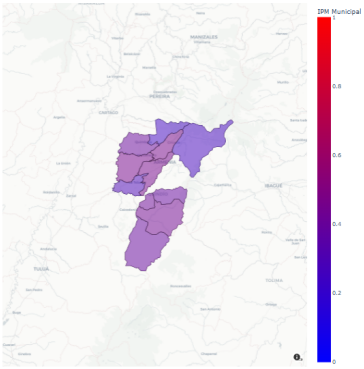

Figura 25: Quindío

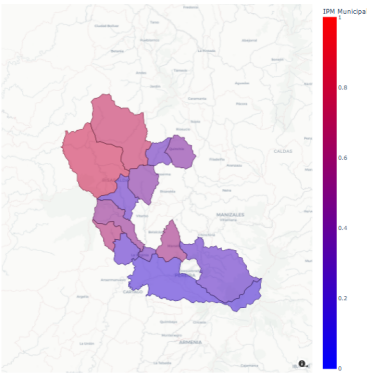

Figura 26: Risaralda

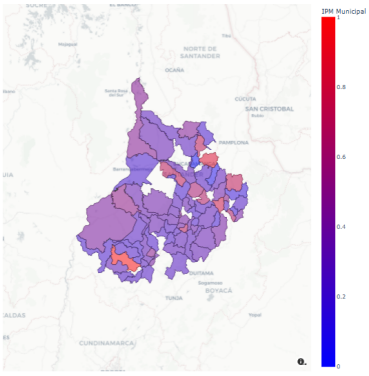

Figura 27: Santander

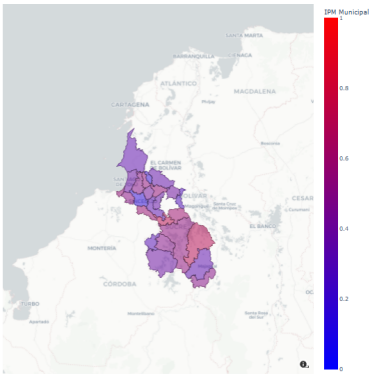

Figura 28: Sucre

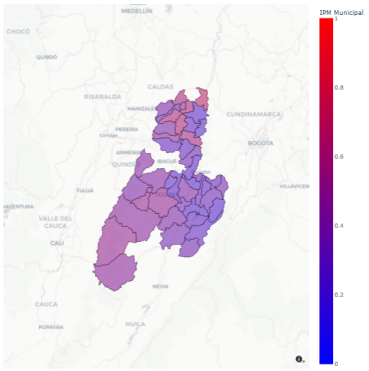

Figura 29: Tolima

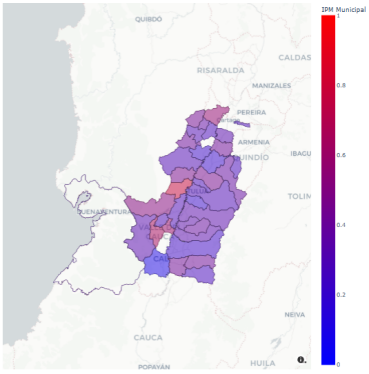

Figura 30: Valle del cauca

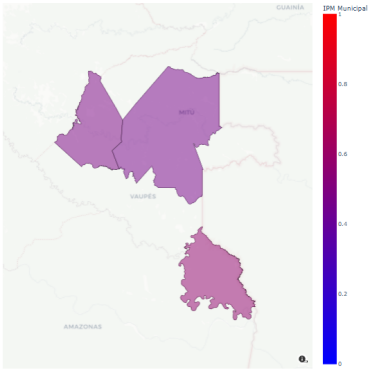

Figura 31: Vaupés

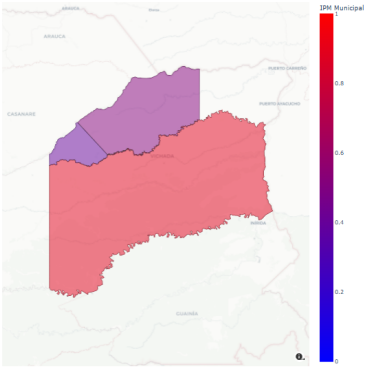

Figura 32: Vichada