UN ESTUDIO DE LAS PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO CERRADO DESDE LAS IDEAS PEIRCEANAS DEL CONTINUO

Autor:
Jaime Esteban Montenegro Barón

Director:
Francisco Javier Vargas Mancera

FACULTAD DE CIENCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

BOGOTÁ D.C, JUNIO 2021

Índice general

1. Resumen **4**

2. Introducción **6**

2.1. Leibniz, Newton y los infinitesimos . . . 6
2.2. Siglo XIX: Cauchy y Weierstrass . . . 7
2.3. Visión del análisis no estándar . . . 7
2.4. Análisis infinitesimal suave: Una reformulación del cálculo en terminos de infinitesimales . . . 8
2.5. Charles S. Peirce y el continuo . . . 8

3. Estado del Arte **10**

3.1. Análisis no estándar . . . 10
3.2. Cálculo elemental: Un enfoque infinitesimal . . . 10
3.3. Un manual de análisis infinitesimal . . . 11
3.4. La lógica de la continuidad de Peirce: Un enfoque conceptual y matemático . . 11
3.5. Modelos y variaciones sobre las ideas peircianas del continuo . . . 12
3.6. El continuo Peirceano . . . 12
3.7. Avances en el Continuo Peirceano . . . 13

4. Marco Teórico **14**

4.1. Los números reales . . . 14
4.1.1. Axiomas de cuerpo . . . 14
4.1.2. Axiomas de orden . . . 15
4.1.3. Axioma de Completitud . . . 15
4.1.4. Cortaduras de Dedekind . . . 15
4.1.5. Algunas definiciones y teoremas de continuidad . . . 16
4.2. Los Hiperreales . . . 18
4.2.1. Propiedades: . . . 18

4.3. Analisis Infinitesimal Suave (SIA) 20
4.3.1. Nociones básicas en SIA 20
4.3.2. Cálculo diferencial básico 20
4.4. El Continuo Peirceano 23
4.5. Modelo $\mathscr{C}_{Ord}$: Un modelo para el continuo de Charles S. Peirce. 24
4.5.1. Operaciones algebráicas en $\mathscr{C}_{Ord}$ 26
4.6. Construcción del plano en $\mathscr{C}_{Ord}$ 30

5. Funciones generalizadas en $\mathscr{C}_{Ord}$ **31**
5.1. Coherencia, Estratificación y Continuidad: 32
5.2. Microrectitud 34
5.3. Cálculo diferencial 35

6. Teoremas de continuidad en $\mathscr{C}_{Ord}$ **36**
6.1. Teorema del valor intermedio para funciones α-continuas: 36
6.2. Teorema de Rolle 37

7. Conclusiones **40**

Referencias **41**

Índice de figuras

4.1. La recta hiperreal. Las partes finita e infinita de la línea hiperreal están separadas entre sí por una línea de puntos. (*Tomado de:* Elementary calculus an infinitesimal approach, H. Jerome Keisler. 2005, Slope and Velocity: The Hyperreal Line, figure 1.4.3.) . . . 19
4.2. Otra forma de representar las partes infinitas de la línea hiperreal es con un "telescopio infinito". (*Tomado de:* Elementary calculus an infinitesimal approach, H. Jerome Keisler. 2005, Slope and Velocity: The Hyperreal Line, figure 1.4.4.) . . . 19
4.3. Usando un efecto similar al que se aplica en (Keisler 2005, figura 1.4.3.) para mostrar la existencia de los infinitesimos en la recta hiperreal, se muestra para el ejemplo anterior una representación de la α-sucesión r, en donde r_2 esta dentro de r_1 y a su vez, r_1 esta dentro de r_0. . . . 25
4.4. Comparación de las sucesiones $r = (r_0, r_1)$ y $r' = (r'_0, r'_1)$. . . . 29

5.1. Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 5) . . . 31
5.2. Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 6) . . . 32
5.3. Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 9) . . . 34

6.1. Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 13) . . . 37
6.2. Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 14) . . . 38

Capítulo 1

Resumen

Con la aritmetización del análisis predomina en la academia la enseñanza del cálculo desde la noción de límite y las concepciones del continuo de Cantor y Dedekind; incluso cuando Abraham Robinson formuló el análisis no estándar en 1966, este no predominó tanto como el "análisis estándar".

Si bien es cierto que el análisis que conocemos hoy en día se puede estudiar desde las concepciones del continuo de Cantor y Dedekind, existen distintas formas de abordarlo; por ejemplo, se pueden considerar las características que Charles S. Pierce atribuía al continuo como lo son la inextensibilidad (no se reduce a puntos), la potencialidad (El continuo no esta completamente determinado y dado), la reflexividad ('toda parte es semejante al todo') y la supermultitud (el continuo no es capturable por ningún cardinal Cantoriano).

Este trabajo tiene como fin explorar el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ que reune las ideas de Peirce mencionadas anteriormente junto con algunos conceptos básicos del análisis infinitesimal suave (SIA) y el análisis no estándar. Se explora en particular el concepto de función continua y algunos de los teoremas clásicos de estas funciones tales como el teorema del valor intermedio y el teorema de Rolle.

Abstract

With the arithmetisation of analysis, the teaching of calculus from the notion of limit and the continuum conceptions of Cantor and Dedekind predominates in academia; even when Abraham Robinson formulated non-standard analysis in 1966, it was not as dominant as "standard analysis".

While it is true that the analysis we know today can be studied from Cantor's and Dedekind's conceptions of the continuum, there are different ways of approaching it; for example, one can consider the characteristics that Charles S. Pierce attributed to the continuum such as inextensibility (it is not reducible to points), potentiality (the continuum is not completely determined and given), reflexivity ('every part is similar to the whole') and supermultitude (the continuum is not capturable by any Cantorian cardinal).

This thesis aims to explore the $\mathscr{C}_{Ord}$ model which brings together the ideas of Peirce mentioned above together with some basic concepts of smooth infinitesimal analysis (SIA) and non-standard analysis. In particular, the concept of continuous function and some of the classical theorems of these functions such as the intermediate value theorem and Rolle's theorem are explored.

Capítulo 2

Introducción

2.1. Leibniz, Newton y los infinitesimos

A lo largo de la historia muchos matemáticos se han preguntado sobre cuestiones relacionadas a la continuidad y al infinito. Algunos de ellos fueron Isaac Newton y Gottfried W. Leibniz, que a finales del siglo XVII de forma autónoma, desarrollaron el calculo diferencial e integral en principio para dar respuesta a algunos fenómenos físicos relacionados con las problemas del movimiento.

Leibniz creó la notación "dx" para refererirse a la diferencia de números consecutivos de una variable x. Esta diferencia fue pensada como un valor infinitamente pequeño pero que nunca sería cero, de forma análoga, introduce el signo de la integral $\int$, y con esta notación escribe la expresión $\int ydx$ con el fin de indicar la suma de todos los rectángulos cuya anchura es infinitamente pequeña y de tamaño $y \cdot dx$ (entiendase este producto como el área de un rectángulo cuya base tiene como longitud dx y de altura y).

Por otra parte, Isaac Newton utilizó un lenguaje diferente que se podía incorporar facilmente en las cuestiones relacionadas con el movimiento; a x e y las llamó fluentes (cantidades que varian en el sentido espacial o temporal) y a $\dot{x}$ e $\dot{y}$ las denominó fluxiones (velocidades con las que fluyen y se incrementan por el movimiento generador).

En sus deducciones, Newton se da cuenta que si (x, y) es un punto de la curva definida por una ecuación en x e y, entonces $(x + \dot{x}, y + \dot{y})$ debe estar en la tangente a la curva, la recta que pasa por (x, y) de pendiente $\dot{x}/\dot{y}$, y no en la propia curva.

Haciendo una traducción de las notaciones, resulta ser equivalente

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{2.1}$$

en donde $\frac{dx}{dt}$ representa el cambio de la posición x con respecto al tiempo t.

Así, Leibniz y Newton se referían a los infinitesimales casi de forma simultánea en sus trabajos desde perspectivas diferentes y sus razonamientos fueron usados hasta el siglo XIX por algunos matemáticos como Euler, Bernoulli, Lagrange y de L'Hôpital.

2.2. Siglo XIX: Cauchy y Weierstrass

Podría decirse que la "rigorización" del análisis real en el siglo XIX comenzó con el celebre texto *Cours d'analyse* de Augustin L. Cauchy, su iniciativa planteó procedimientos para trabajar con funciones continuas, pero también un "ideal de continuidad" proveniente originalmente de Leibniz según el cual las propiedades deben persistir a través de los límites. Por otra parte, Karl Weierstrass (En alemán, Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) presentó a través de la definición *epsilon-delta* $(\varepsilon - \delta)$ la continuidad de una función, el limite de una sucesión (y de una función) y la convergencia de sucesiones y series de funciones. Con dichas definiciones las matemáticas de la época ganaron rigor, pues se logró recontextualizar el cálculo diferencial e integral que ya hace varios años habían definido Leibniz y Newton, dejando atrás los infinitésimos para dejarlo en términos de números conocidos.

2.3. Visión del análisis no estándar

Con las definiciones dadas por Cauchy y Weierstrass, los infinitesimales fueron "desechados" y reemplazados por todo el rigor que traía consigo la teoria de límites.

En 1966, el matemático polaco Abraham Robinson publicó su libro *Non-Standard Analysis* con el fin de aportar el rigor que le faltaba al cálculo infinitesimal formulado por Newton y Leibniz. Este aporte lo realizó adoptando conceptos y métodos de la lógica matemática contemporánea capaces de proveer un marco lo suficientemente riguroso como para desarrollar el cálculo. Gracias a las contribuciones de Robinson, los infinitesimales fueron restaurados y consolidados en una nueva rama de las matemáticas llamada *Análisis no estándar* que permite definir nuevos objetos denominados "externos" o "no estándar" y además, deja construir un conjunto de números que extiende al de los números reales ($\mathbb{R}$) llamado hiperreales ($^*\mathbb{R}$) de los que hablaremos más adelante en la sección 4.2.

2.4. Análisis infinitesimal suave: Una reformulación del cálculo en terminos de infinitesimales

En la década de 1970 se crearon nuevos desarrollos en la teoría de categorías que llevaron a la creación del análisis infinitesimal suave, una rigurosa teoría axiomática de los infinitesimales nilpotentes y no puntiformes.

Hablar de análisis infinitesimal suave nos remite directamente a la definición de continuo; alejándonos de la idea tradicional de la teoria de conjuntos que habla de un continuo constituido por puntos discretos, se da una nueva visión que se refiere a un continuo conformado por infinitesimales. De igual modo, se ha considerado que las curvas estan compuestas por lineas rectas infinitesimales (más adelante nos referimos formalmente al concepto de microrectitud).

Por otra parte, el análisis infinitesimal suave postula que todas las funciones son continuas, afirmación que consolida la idea de que cada función no puede escribirse en términos de objetos discretos. A partir de esta idea se define con más detalle a los infinitesimales, objetos matemáticos que, sin coincidir necesariamente con el cero, son más pequeños que cualquier cantidad finita. Además, un infinitesimal nilpotente es un número ε tal que su cuadrado es igual a cero ($\varepsilon^2 = 0$). Esto se explora con más detalle en la sección 4.3.

2.5. Charles S. Peirce y el continuo

Uno de los defensores del desarrollo del análisis por infinitésimos en el siglo XIX fue el filósofo y científico Charles Sanders Peirce, quien tenía una visión particular respecto a la continuidad. Dentro de sus estudios, retoma algunas nociones aristotélicas acerca del continuo (en el sentido de que no esta formado por puntos) y se separa de las ideas que se tenian en la época respecto a este concepto, en donde la aritmetización del análisis ya se había llevado acabo y se tenía la visión de que el continuo se identificaba con los números reales.

La ideas de Pierce respecto al continuo no han recibido la atención que merecen por parte de los matemáticos que estudiaban la continuidad, debido a que aún se encontraban en desarrollo para las fechas de su muerte. Algunas construcciones recientes (Vargas, 2015, 2020) (Vargas, En preparación) permiten desarrollar distintos aspectos del Cálculo y por lo tanto puede ser una alternativa a otros enfoques como el análisis no estándar.

El proposito de este trabajo es profundizar en el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ (que sintetiza las caracterizaciones de las ideas de Charles S. Pierce) con el fin de estudiar las propiedades de las funciones continuas desde esta perspectiva.

Capítulo 3

Estado del Arte

3.1. Análisis no estándar

- **Nombre**: Non-Standard Analysis
- **Autor**: Abraham Robinson
- **Institución**: University of California
- **Año de publicación**: 1966
- **Resumen**: El autor propone una nueva teoria que produjo el renacimiento de los infinitesimales, pues reformula el cálculo utilizando una noción lógicamente rigurosa de números infinitesimales. En su motivación, Robinson considera que las ideas de Gottfried Wilhelm Leibniz pueden ser plenamente recuperadas y que, además, llevan a un enfoque novedoso del Análisis clásico y de muchas otras ramas de las matemáticas.
- **Relevancia**: La obra de Abraham Robinson reformula el cálculo haciendo uso de una noción lógicamente rigurosa de números infinitesimales. Desde esta perspectiva resulta útil para la investigación que se quiere hacer, pues muestra por primera vez que es posible desarrollar el análisis recurriendo a infinitesimales de manera formal.

3.2. Cálculo elemental: Un enfoque infinitesimal

- **Nombre**: Elementary Calculus: An infinitesimal Approach
- **Autor**: H. Jerome Keisler
- **Institución**: University of Wisconsin
- **Año de publicación**: 2005
- **Resumen**: Este libro se basa en la construcción que hace Abraham Robinson de los

números hiperreales ($^*\mathbb{R}$), además define todos los conceptos del cálculo como continuidad, derivada e integral usando infinitesimales.

- **Relevancia**: Este texto es una excelente guía para el trabajo que se quiere realizar, dado que brinda las nociones necesarias para el estudio de las funciones continuas usando infinitesimales, además de que muestra comparaciones importantes entre las definiciones del analisis no estándar y el análisis convencional.

3.3. Un manual de análisis infinitesimal

- **Nombre**: A primer of infinitesimal Analysis
- **Autor**: John L. Bell
- **Editorial**: Cambridge University Press
- **Año de publicación**: 2008
- **Resumen**: En este texto el cálculo básico se presenta mediante el uso de un concepto sencillo, riguroso y axiomáticamente formulado de 'cero-cuadrado' o infinitesimal 'nil-potente' (el cuadrado de un infinitesimal se pueden establecer como cero). El empleo sistemático de estos infinitesimales reduce el cálculo diferencial a álgebra simple y, al mismo tiempo, restaura el uso de métodos 'infinitesimales' que figuran en las aplicaciones tradicionales del cálculo a problemas físicos, algunos de los cuales se analizan en este libro. Además el autor guía al lector agregando una introducción histórica y filosófica.
- **Relevancia:** Para el estudio de las propiedades de las funciones continuas que se quiere realizar, es necesario recurrir a nociones básicas del análisis infinitesimal suave tales como el concepto de microrectitud y microcancelación, pues dichas definiciones se utilizan en el modelo C_{Ord} que tiene en cuenta las ideas peirceanas acerca del continuo.

3.4. La lógica de la continuidad de Peirce: Un enfoque conceptual y matemático

- **Nombre**: Peirce's Logic of Continuity: A Conceptual and Mathematical Approach
- **Autor(es)**: Fernando Zalamea
- **Institución**: Universidad Nacional de Colombia
- **Año de publicación**: 2012
- **Resumen**: En este libro el autor revela y compila de manera sintética las definiciones

del continuo dadas por Charles Sanders Peirce y las compara con otras definiciones dadas por Cantor, Dedekind, René Thom, entre otros.

- **Relevancia**: La obra de Zalamea brinda la oportunidad de conocer las concepciones de Peirce frente al continuo, hecho que resulta ser muy importante al momento de construir algunos teoremas referidos a las funciones continuas desde una perspectiva diferente a la usual (por ejemplo considerando la idea de que los números reales no expresan la verdadera continuidad).

3.5. Modelos y variaciones sobre las ideas peircianas del continuo

- **Nombre**: Modelos y variaciones sobre las ideas peircianas del continuo
- **Autor**: Francisco Vargas
- **Institución**: Centro de Sistemática Peirceana
- **Año de publicación**: 2014
- **Resumen**: En este trabajo el autor sintetiza las caracterizaciones de las ideas de Charles Pierce del continuo a través del modelo C_{Ord}, en donde "los puntos"no son vistos como indivisibles sino que cuentan con una estructura que es isomorfa a la recta total.
- **Relevancia**: Este trabajo define operaciones algebraicas claves para el desarrollo de nuevas construcciones matemáticas fundamentales para el estudio que se quiere realizar.

3.6. El continuo Peirceano

- **Nombre**: The Peircean Continuum
- **Autores**: Francisco Vargas, Matthew E. Moore
- **Editorial**: Oxford University Press
- **Año de publicación**: 2020
- **Resumen**: Este trabajo se divide en dos secciones: en la primera parte se resumen las características definitorias de la teoria matemática en la que Peirce hizo sus mayores avences, además se evidencia un modelo para esa teoría a partir de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel (ZFC), la segunda sección es un apéndice histórico, en el que Moore resume brevemente los propios intentos de Peirce de poner su concepción en una forma rigurosa.

- **Relevancia**: Las definiciones y los teoremas del análisis que se exploran en la tesis se basan en las definiciones de este trabajo.

3.7. Avances en el Continuo Peirceano

- **Nombre**: Advances on Peirce's Continuum
- **Autores**: Francisco Vargas
- **Editorial**: Oxford University Press
- **Año de publicación**: Por publicarse
- **Resumen**: En este trabajo se define que es una función en $\mathscr{C}_{Ord}$ y se refiere a las definciones y teoremas más importantes del análisis junto con algunas propiedades del cálculo.
- **Relevancia**: Este trabajo es un desarrollo de las dos publicaciones anteriores y muestra las definiciones más importantes para esta tesis.

Capítulo 4

Marco Teórico

4.1. Los números reales

Para introducir a los números reales se presentan los axiomas de cuerpo y orden y el axioma de completitud junto con el método de las Cortaduras de Dedekind, que en breves palabras son clases de números racionales que representan la primera construcción formal del conjunto de los números reales.

A partir de los números enteros positivos ($\mathbb{N}$) $1,2,3,\ldots$, se puede contruir un sistema más amplio, los *números enteros* ($\mathbb{Z}$) y a su vez se pueden definir los *números racionales* ($\mathbb{Q}$) positivos (cocientes de enteros positivos), los negativos y el cero. Los números racionales son utilizados, a su vez, para construir los *números irracionales*, números reales tales como $\sqrt{2}$ o π, que no son racionales, es decir, no se pueden expresar como el cociente de dos números enteros. El sistema de números reales lo constituye la unión entre los números racionales e irracionales y se representa como $\mathbb{R}$.

Dicho conjunto satisface 10 axiomas que a su vez se clasifican en tres grupos distintos: *axiomas de cuerpo, axiomas de orden y el axioma de completitud.*

4.1.1. Axiomas de cuerpo

(Apostol,2001)
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

- **Axioma 1.** (Leyes conmutativas) $x + y = y + x$

- **Axioma 2.** (Leyes asociativas) $(x+y)+z=x+(y+z)$
- **Axioma 3.** (Leyes distributivas) $x(y+z)=xy+xz$
- **Axioma 4.** Dados dos números reales cualesquiera x e y, existe un número z tal que $x+z=y$. Dicho número z se designará como $y-x$; el número $x-x$ se designará por 0. Escribiremos $-x$ en vez de $0-x$ y al número $-x$ lo llamaremos opuesto de x.
- **Axioma 5.** Existe, por lo menos un número real $x \neq 0$. Si x e y son dos números reales con $x \neq 0$, entonces existe un número z tal que $xz=y$. Dicho numero z se designará por $\frac{y}{x}$: el número $\frac{x}{x}$ se designará por 1 y puede demostrarse que es independiente de x. Escribiremos x^{-1} en vez de $\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ y a x^{-1} lo llamaremos reciproco o inverso de x.

4.1.2. Axiomas de orden

(Apostol, 2001)

- **Axioma 6.** Se verifica una y solo una de las relaciones $x=y$, $x<y$, $x>y$.
- **Axioma 7.** Si $x<y$ entonces para cada z, es $x+z<y+z$.
- **Axioma 8.** Si $x>0$ e $y>0$, entonces $xy>0$.
- **Axioma 9.** Si $x>y$ e $y>z$, entonces $x>z$.

4.1.3. Axioma de Completitud

(Apostol,2001)

- **Axioma 10.** Todo conjunto no vacío S de números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b=\sup(S)$.

  Como consecuencia de este axioma se obtiene que todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente admite un ínfimo.

4.1.4. Cortaduras de Dedekind

Definición. 4.1.1. *Sean A y B dos conjuntos de números racionales, entonces una cortadura de Dedekind es un par ordenado (A,B) de clases que constituyen una partición de números racionales.*

***Ejemplo* 1.** *Sean* $A = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\}$ *y* $B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$, *entonces es posible definir* $\sqrt{2}$ *como* (A, B).

Así, se completa el conjunto de números reales añadiendo tantos irracionales como sea posible.

4.1.5. Algunas definiciones y teoremas de continuidad

Definición. 4.1.2. ***(Continuidad según A. Cauchy). [Goldblatt, 1998].*** *Una función* $f(x)$ *es continua con respecto a x entre los límites dados si entre estos límites un aumento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un aumento infinitamente pequeño en* f.

Definición. 4.1.3. ***[Apostol, 2001, pág 95].*** *Sean* (S, d_S) *y* (T, d_T) *espacios métricos y sea* $f : S \to T$ *una función de S en T. La función* f *se llama continua en un punto p de S si para cada* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que*

$$d_T(f(x), f(p)) < \varepsilon \tag{4.1}$$

siempre que $d_s(x, p) < \delta$.

Teorema 4.1.1. *(**Teorema de Bolzano**) **[Apostol, 2001, pág 103]**. Sea* f *real y continua en un intervalo compacto* $[a, b]$ *de* $\mathbb{R}$, *y supongamos que* $f(a)$ *y* $f(b)$ *tienen signos opuestos; esto es, supongamos que* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Entonces existe, por lo menos, un punto c del intervalo abierto (a,b) tal que* $f(c) = 0$.

Demostración. Por definición, supongamos que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$. Sea

$$A = \{x : x \in [a, b] \, y \, f(x) \geqslant 0\} \tag{4.2}$$

A es no vacío, puesto que $a \in A$, y A esta acotado por b, Sea c =sup A. Entonces $a < c < b$. Probaremos que $f(c) = 0$.
Si $f(c) \neq 0$, existe una bola unidimensional $B(c;\delta)$ en la que f tiene el mismo signo que $f(c)$. Si $f(c) > 0$, entonces habrá puntos $x > c$ en los que $f(x) > 0$, en contradicción con la definición de c. Si $f(c) < 0$, entonces $c - \delta/2$ es una cota superior para A, contradiciendose, de nuevo, la definición de c. Por consiguiente debemos tener $f(c) = 0$.

□

Teorema 4.1.2. *(**Teorema del valor intermedio para funciones continuas**) **[Apostol, 2001, pág 106]**. Supongamos que* f *es real y continua en un intervalo compacto S de* $\mathbb{R}$. *Supongamos que existen dos puntos a y b de S tales que* $f(a) \neq f(b)$. *Entonces f toma todos los valores comprendidos entre* $f(a)$ *y* $f(b)$ *en el intervalo* (a, b).

Demostración. Sea k un número comprendido entre $f(a)$ y $f(b)$ y apliquemos el teorema de Bolzano a la función g definida en $[a,b]$ por medio de la ecuación $g(x) = f(x) - k$:

Notemos que g es continua, pues $f(x)$ es continua y k es una constante. Además cumple que $g(a) = f(a) - k$ es menor que cero y $g(b) = f(b) - k$ es mayor que cero. Aplicando el teorema de Bolzano, existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = 0$, luego $g(c) = f(c) - k = 0$, por lo tanto, $f(c) = k$.

$\square$

Definición. 4.1.4. ***[Apostol, 2001, pág 125]****. Sea f una función real definida en un intervalo abierto (a,b), y supongamos que $c \in (a,b)$. Diremos que f es diferenciable en c siempre que el limite*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \tag{4.3}$$

exista. El limite, designado por $f'(c)$, se llama derivada de f en c.

Teorema 4.1.3. ***(Teorema de Rolle) [Apostol, 2001, pág 132]****. Supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a,b), y supongamos también que f es continua en los puntos extremos a y b. Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto interior c, por lo menos, en el que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a,b) y llegaremos a una contradicción. Como f es continua en un conjunto compacto, alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de [a,b], Ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior (pues en ese caso f' se anularía); por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$, y por lo tanto f es constante en $[a,b]$. Esto contradice el supuesto que f' no es cero en ningún punto (a,b). Luego $f'(c) = 0$ para algún c de (a,b). $\square$

Como consecuencia de este teorema se tienen los dos siguiente teoremas:

Teorema 4.1.4. ***(Teorema del valor medio) [Apostol, 2001, pág 132]****. Sea f una función con derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a,b), y supongamos además que f es continua en los extremos a y b. Entonces existe un punto c de (a,b) tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \tag{4.4}$$

Teorema 4.1.5. ***(Teorema del valor intermedio) [Apostol, 2001, pág 134]****. Supongamos que f esta definida en un intervalo compacto $[a,b]$ y que posee derivada (finita o infinita) en cada* *uno de los puntos interiores. Supongamos, además, que f posee derivadas laterales finitas $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$ en los puntos extremos, con $f'_+(a) \neq f'_-(b)$. Entonces si c es un número real comprendido entre $f'_+(a)$ y $f'_-(b)$, existe por lo menos un punto interior x tal que $f'(x) = c$.*

4.2. Los Hiperreales

En un nuevo resurgimiento del cálculo infinitesimal respaldado por el matemático Abraham Robinson, el análisis no estándar se consolida como una nueva teoría en las matemáticas y trae consigo nuevos conceptos que darían grandes aportes al cálculo diferencial e integral, teniendo en cuenta nuevos terminos tales como 'infinitamente pequeño' o 'infinitamente grande'.

Definición. 4.2.1. *Sea $\varepsilon \neq 0$, decimos que ε es infinitamente pequeño si*

$$|\varepsilon| < \frac{1}{n}, \quad \textit{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.5}$$

*a partir de esta definición, podemos definir que es un número infinitamente grande, tomando el inverso de ε. **[Goldblatt, 1998, pg 3].***

Definición. 4.2.2. *Sea $\omega = \frac{1}{\varepsilon}$, se dice que ω es infinitamente grande si*

$$|\omega| > n, \quad \textit{para todo} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{4.6}$$

Sin embargo, en el sistema numérico real $\mathbb{R}$ no existen los infinitesimales no nulos ni los números infinitamente grandes. A razón de esto nace el interés de estudiar un sistema mayor que forma un campo ordenado que denotaremos como ${}^*\mathbb{R}$ que, a su vez, contiene a $\mathbb{R}$ como subcampo. **[Goldblatt, 1998, pág 3].**

4.2.1. Propiedades:

1. Los infinitesimales en ${}^*\mathbb{R}$ son de tres tipos: positivos, negativos y el número real 0.

2. Los símbolos $\Delta x, \Delta y, \ldots$ y las letras griegas ε y δ se utilizarán para los infinitesimales.

3. Si a y b son números hiperreales cuya diferencia $a - b$ es infinitesimal, decimos que a está infinitamente cerca de b.

Por otra parte, retomando la presentación de Keisler en su libro Elementary calculus an infinitesimal approach, se utiliza la noción de microscopio (haciendo referencia a que los infinitesimales son infinitamente pequeños con respecto a los números finitos) y la noción de telescopio (inidicando las cantidades infinitamente grandes) como se muestra en la figura 4.1 y 4.2.

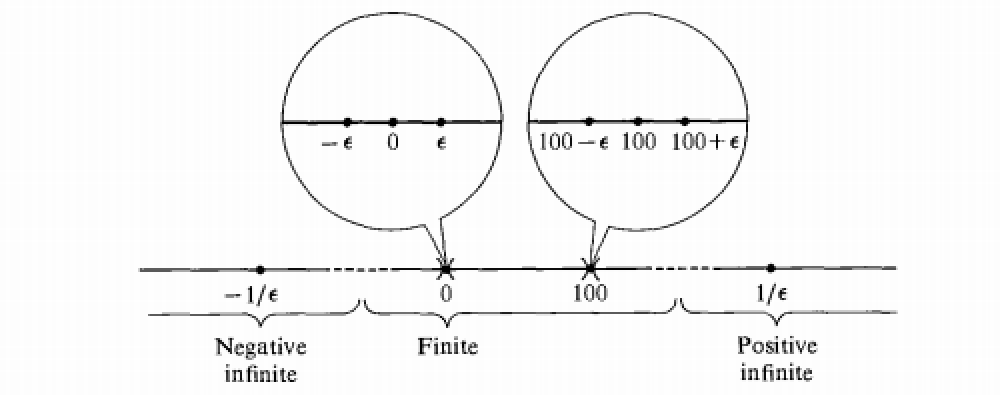

Figura 4.1: La recta hiperreal. Las partes finita e infinita de la línea hiperreal están separadas entre sí por una línea de puntos. (*Tomado de:* Elementary calculus an infinitesimal approach, H. Jerome Keisler. 2005, Slope and Velocity: The Hyperreal Line, figure 1.4.3.)

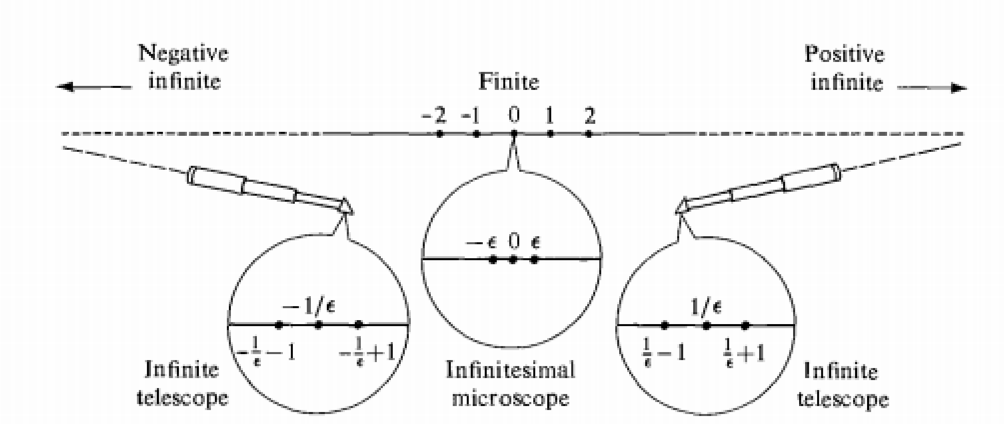

Figura 4.2: Otra forma de representar las partes infinitas de la línea hiperreal es con un "telescopio infinito". (*Tomado de:* Elementary calculus an infinitesimal approach, H. Jerome Keisler. 2005, Slope and Velocity: The Hyperreal Line, figure 1.4.4.)

4.3. Analisis Infinitesimal Suave (SIA)

4.3.1. Nociones básicas en SIA

A continuación, se dan unas definiciones útiles para poder comprender algunos conceptos claves del cálculo diferencial en SIA.

Definición. 4.3.1. *Sea $\varepsilon \neq 0$ un infinitesimal, entonces decimos que es un* **cuadrado nulo** *si $\varepsilon^2 = 0$ (Al conjunto que contiene todos los infinitesimales cuadrados nulos lo llamaremos Δ). [J. Bell, 2008, pág 9]*

Definición. 4.3.2. ***Microrectitud:*** *Para cualquier curva suave C y cualquier punto P en ella, existe un (pequeño) segmento no degenerado de C -un microsegmento- alrededor de P que es recto, es decir, C es micro-recta alrededor de P. [J. Bell, 2008, pág 9]*

Definición. 4.3.3. ***Principio de Microafinidad:*** *Para cualquier función $g : \Delta \to R$, existe un unico b en R tal que, para todo ε en Δ, tenemos $g(\varepsilon) = g(0) + b \cdot \varepsilon$. [J. Bell, 2008, pág 21]*

Observación: En el contexto de SIA se tienen los siguiente principios:

1. Δ está incluido en el intervalo $[0,0]$, pero es no degenerado, es decir, no es idéntico a 0.

2. Todo elemento de Δ es indistinguible de 0.

3. Es falso que, para todo ε en Δ, o bien $\varepsilon = 0$ o bien $\varepsilon \neq 0$.

4. Δ satisface el **Principio (universal) de micro-cancelación**, es decir, para cualquier $a, b \in \mathbb{R}$ si $\varepsilon \cdot a = \varepsilon \cdot b$ para todo ε en Δ, entonces $a = b$. En particular, si $\varepsilon \cdot a = 0$ para todo ε en Δ, entonces $a = 0$. [J. Bell, 2008, pág 22].

4.3.2. Cálculo diferencial básico

Muchos de los teoremas de diferenciabilidad que tenemos para los reales son validos en SIA al igual que algunas definiciones, veamos las más importantes:

Definición. 4.3.4. ***[J. Bell, 2008, pág 24]*** *Para una x fija en $\mathbb{R}$, se define la función $g_x : \Delta \to R$ por*

$$g_x(\varepsilon) = f(x + \varepsilon). \tag{4.7}$$

Por microafinidad existe una única b en $\mathbb{R}$, cuya dependencia de x indicaremos denotándola como b_x, tal que para todo ε en Δ,

$$f(x+\varepsilon) = g_x(\varepsilon) = g_x(0) + b_x \cdot \varepsilon = f(x) + b_x \cdot \varepsilon \tag{4.8}$$

permitiendo que x varie se obtiene entonces una función $x \to b_x : R \to R$ denotada como f y se llama como es habitual, la derivada de f.

$$f(x+\varepsilon) = f(x) + \varepsilon \cdot f'(x) \tag{4.9}$$

para x arbitraria en $\mathbb{R}$ y ε en Δ, es la *ecuación fundamental del cálculo diferencial* en S. La cantidad $f(x)$ es la pendiente en x de la curva determinada por f, y la microcantidad

$$\varepsilon f'(x) = f(x+\varepsilon) - f(x) \tag{4.10}$$

es precisamente el cambio o incremento del valor de f al pasar de x a $x+\varepsilon$.

Vemos que toda función $f : R \to R$ tiene una derivada. Se deduce que el proceso de formación de derivadas se puede iterar indefinidamente de forma que se obtengan derivadas superiores $f^{''}, f^{'''}, \ldots$ Así, la enésima derivada $f^{(n)}$ de f se define recursivamente por la ecuación

$$f^{(n-1)}(x+\varepsilon) = f^{(n-1)}(x) + \varepsilon \cdot f^{(n)}(x) \tag{4.11}$$

Definamos ahora algunas propiedades básicas de la derivada:

Definición. 4.3.5. ***Reglas de suma y escalares múltiples:*** *Para cualquier función $f, g : J \to R$ y cualquier c en $\mathbb{R}$,*

$$(f+g)' = f' + g' \tag{4.12}$$

$$(c \cdot f)' = c \cdot f' \tag{4.13}$$

donde $f+g$ y $c \cdot f$ son las funciones $x \to f(x) + g(x)$, $x \to c \cdot f(x)$, respectivamente. [J. Bell, 2008, pág 25]

Teorema 4.3.1. ***Regla del producto:*** *Para cualquier función $f, g : J \to R$, tenemos*

$$(f \cdot g)^{'} = f^{'} \cdot g + f \cdot g^{'} \tag{4.14}$$

donde $f \cdot g$ es la función $x \to f(x) \cdot g(x)$. [J. Bell, 2008, pág 25]

Definición. 4.3.6. ***Regla polinomial:*** *Si $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$, entonces*

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k \cdot a_k \cdot x^{k-1} \tag{4.15}$$

En particular $(cx)' = c$.
[J. Bell, 2008, pág 26]

A partir del teorema 4.3.1 podemos definir la regla del cociente:

Definición. 4.3.7. ***Regla del cociente:*** *Si $g : J \to R$ satisface $g(x) \neq 0$ para todo x en J, entonces para cualquier $f : J \to R$*

$$(f/g)' = (f' \cdot g - f \cdot g')/g^2 \tag{4.16}$$

donde f/g es la función $x \to f(x)/g(x)$.
[J. Bell, 2008, pág 26]

Teorema 4.3.2. ***Regla de composición de funciones:*** *Para cualquier $f, g : J \to R$ tenemos*

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f' \tag{4.17}$$

donde $g \circ f$ es la función $x \to g(f(x))$.
[J. Bell, 2008, pág 26]

Teorema 4.3.3. ***Regla de la función inversa:*** *Supongamos que $f : J_1 \to J_2$ admite una inversa, es decir, existe una función $g : J_2 \to J_1$ tal que $g(f(x)) = x$ y $f(g(y)) = y$ para todo x en J_1 y en J_2. Entonces f y g estan relacionadas por la ecuación*

$$(f' \circ g) \cdot g' = (g' \circ f) \cdot f' = 1. \tag{4.18}$$

[J. Bell, 2008, pág 26]

Obsérvese que de esta última regla se deduce que la derivada de cualquier función que admite una inversa no puede desaparecer en ninguna parte.

4.4. El Continuo Peirceano

Charles Pierce atribuye al continuo ciertas características que otros matemáticos (como Cantor y Dedekind) no consideraban:

Inextensibilidad: Peirce le otorgaba al continuo una propiedad de carácter sintético y es que el continuo no es reductible a puntos últimos, es decir que por ejemplo los reales hacen parte del continuo pero no lo expresan como tal, dicho de otra forma, se aleja de la idea 'atómica' de que el continuo esta conformado por 'indivisibles'.

Reflexividad: Para introducir lo que significa esta propiedad, usaremos la siguiente frase: *'El continuo se define como algo cuya parte, por pequeña que sea, tiene partes del mismo tipo' (Peirce, 1873)*, que de forma sintética significa (siguiendo un principio de reflexión) que el todo puede reflejarse en cualquiera de sus partes.

Supermultitud: Rescatando la teoria de transfinitos dada por George Cantor para referirse a los ordinales infinitos, Peirce dice que ningún cardinal de Cantor captura al continuo dado que no esta formado por elementos últimos, esto basandose en la idea de que hay cardinales asociados a los conjuntos, pero estos estan formados por elementos (extensionalidad), característica que el continuo no cumple. Para Peirce, cada cardinal corresponde a una 'multitud' y la 'supermultitud' se refiere a algo que trasciende la misma idea de conjunto.

Potencialidad: Según Peirce 'la potencialidad supone que los individuos son determinables en cada multitud. Es decir, son determinables como distintos. Pero no puede haber una cualidad distintiva para cada individuo; porque estas cualidades formarían una colección demasiado multitudinaria para que pudieran permanecer distintas' (Peirce 1958, 6.185-188).

Genericidad: Para Peirce, 'continuidad y generalidad son dos nombres para la misma ausencia de distincion de los individuos' (Peirce 1958, 4.172).
En este sentido, la genericidad parece coincidir con la propiedad de inextensibilidad y el hecho de que en un continuo supermultitudinario los individuos ya no existen, se funden unos con otros (Vargas, 2015).

Con estas propiedades (junto con el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ (Vargas, 2021)) pueden introducirse nociones algebráicas como la suma y el producto con las cuales se pueden definir funciones.

No obstante, haciendo una extensión de los reales se pueden incorporar conceptos del cálculo y en ese orden de ideas, tiene sentido preguntarse por los teoremas mencionados anteriormente.

4.5. Modelo $\mathscr{C}_{Ord}$: Un modelo para el continuo de Charles S. Peirce.

La construcción del modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ realizado en (Vargas, 2015) utiliza la teoria de conjuntos usual haciendo uso de los axiomas de Zermelo-Fraenkel y el axioma de elección.

En este modelo se trabaja con la clase Ord que 'contiene' a todos los ordinales. Tenga en cuenta que la clase Ord no es un conjunto, suponer lo contrario conllevaría a una contradicción en la teoria axiomática de conjuntos (por ejemplo la **Paradoja de Burali-Forti**).

Antes de dar las siguientes definiciones es pertinente tener en cuenta la notación que se da a continuación :

- $x \upharpoonright y :=$ x restringido a y.
- $-x :=$ opuesto de la sucesión x, tomando la sucesión de los opuestos.
- $x^\frown y :=$ concatenación de x e y.
- $(\bar{0})_\alpha :=$ sucesión constante de longitud α cuyas componentes son todas 0.

Definición. 4.5.1. ***[Vargas, 2015, pág 143]****. Para todo $\alpha \in Ord \setminus \{0\}$, sea $\langle \mathscr{C}_\alpha, <_\alpha \rangle$ el conjunto de todas las α-sucesiones reales con el orden lexicográfico.*

Definición. 4.5.2. ***[Vargas, 2015, pág 143]****. Sea $\langle \mathscr{C}_{Ord}, <_{Ord} \rangle$ definido como:*

$$\mathscr{C}_{Ord} = \bigcup_{\alpha \in Ord} \mathscr{C}_\alpha \tag{4.19}$$

- *Para cualquier $x, y \in \mathscr{C}_{Ord}$, definimos $x <_{Ord} y$ si y solo si para $\alpha = \text{mín}(dom(x), dom(y))$, $x \upharpoonright \alpha <_\alpha y \upharpoonright \alpha$.*

Definición. 4.5.3. ***[Vargas, 2015, pág 144]****. Para $x, y \in \mathscr{C}_{Ord}$ tenemos que xEy sii $dom(y) < dom(x)$ y $x \upharpoonright dom(y) = y$.*

Definición. 4.5.4. ***[Vargas, 2015, pág 144]****. Para $x \in \mathscr{C}_{Ord}$ sea $\mathscr{M}_x$ la mónada asociada a x, se define como la clase de elementos $y \in \mathscr{C}_{Ord}$ tales que yEx.*

Ejemplo 2. *Sea $r = (r_0; r_1; r_2, ...)$ una α-sucesión real y sea $r' = (r_0)$ una sucesión real de longitud 1, entonces rEr'; notese que $dom(r') < dom(r)$ y que $r \restriction dom(r') = r \restriction 1 = \{r_0\} = r'$.*

Nota: La relación E es opuesta a la relación de pertenencia para conjuntos ($\in$). En efecto, si la relación de pertenencia fuera equivalente a la relación E entonces $r' \in r$ sería lo mismo que decir $r'Er$ lo cual es falso.

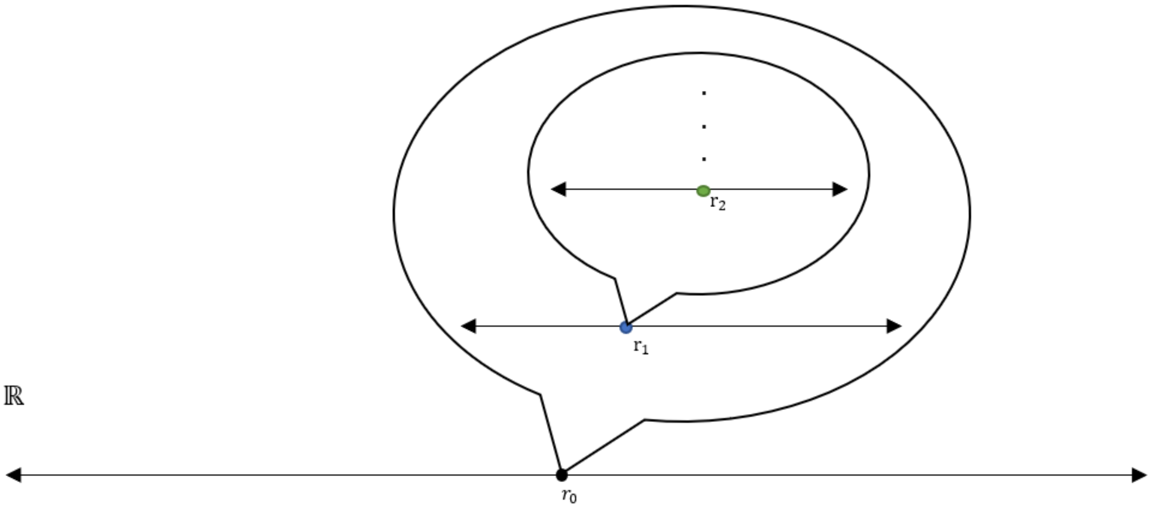

Figura 4.3: Usando un efecto similar al que se aplica en (Keisler 2005, figura 1.4.3.) para mostrar la existencia de los infinitesimos en la recta hiperreal, se muestra para el ejemplo anterior una representación de la α-sucesión r, en donde r_2 esta dentro de r_1 y a su vez, r_1 esta dentro de r_0.

El siguiente teorema demuestra la “reflexividad"del modelo:

Teorema 4.5.1. ***[Vargas, 2015, pág 144]*** *Para cualquier $x \in \mathscr{C}_{Ord}$*

$$\langle \mathscr{M}_x, <_{Ord}, E\rangle \simeq \langle \mathscr{C}_{Ord}, <_{Ord}, E\rangle \tag{4.20}$$

Demostración. Sea $\alpha = dom(x)$. El isomorfismo se sigue del hecho que toda sucesión de ordinales cofinal en Ord es isomorfa (considerando la relacion de orden) a esta clase. Más formalmente, $\mathscr{M}_x$ es la clase de sucesiones reales cuyo soporte es un conjunto (no una clase propia),y cuya α-subsucesión inicial es precisamente x. Toda sucesión $y \in \mathscr{M}_x$ se puede escribir como $y = x^\frown y'$ (usando la operacion de concatenación de sucesiones). El isomorfismo se sigue inmediatamente tomando la correspondencia dada por $y \mapsto y'$. $\square$

Corolario 4.5.1. ***[Vargas, 2015, pág 147]*** *Para todo $x, y \in \mathscr{C}_{Ord}$ se tiene*

$$\langle \mathscr{M}_x, <_{Ord}, E\rangle \simeq \left\langle \mathscr{M}_y, <_{Ord}, E\right\rangle \tag{4.21}$$

Definición. 4.5.5. ***[Vargas, 2015, pág 147]*** *Sean $s, t \in \mathscr{C}_{Ord}$ con $dom(s) = dom(t) = \alpha$. El deslizamiento de s en t es la función $\sigma_{st} : \mathscr{C}_{Ord} \to \mathscr{C}_{Ord}$ definida como:*

$$\sigma_{st} = \begin{cases} x + (t - s), & dom(x) = \alpha \\ x + [(t - s) \restriction \beta] & dom(x) = \beta < \alpha \\ x + [(t - s)^\frown \left(\bar{0}\right)_{<\beta-\alpha}] & dom(x) = \beta > \alpha \end{cases} \tag{4.22}$$

Teorema 4.5.2. ***[Vargas, 2015, pág 148]*** *Para todo $s, t \in \mathscr{C}_{0rd}$ con $dom(s) = dom(t) = \alpha$, el deslizamiento*

$$\sigma_{st} : \mathscr{C}_{Ord} \to \mathscr{C}_{Ord} \tag{4.23}$$

es un automorfismo de $\langle \mathscr{C}_{Ord}, <_{Ord}, E\rangle$.

Aunque no los utilizaremos en este trabajo, es posible introducir números infinitos en el contexto de $\mathscr{C}_{Ord}$:

Definición. 4.5.6. ***[Vargas, 2015, pág 150]*** *Para todo $\alpha, \beta \in Ord \setminus \{0\}$ sea $\left\langle \mathscr{C}_{\alpha;\beta}, <_{\alpha;\beta}\right\rangle$ definido como el conjunto de todas las parejas ordenadas $(s; s^{'})$ donde s es una α-sucesión y $s^{'}$ una β-sucesión de reales. El orden $<_{\alpha;\beta}$ es el lexicográfico,*

$$(s, s') <_{\alpha;\beta} (t, t') \leftrightarrow (s <_\alpha t) \vee \left((s = t) \wedge (s' <_\beta t')\right) \tag{4.24}$$

Aquí los ordenes $<_\alpha$ y $<_\beta$ son los correspondientes de $\mathscr{C}_\alpha$ y $\mathscr{C}_\beta$.

4.5.1. Operaciones algebráicas en $\mathscr{C}_{Ord}$

Por otra parte, es posible definir las operaciones que se tenían en los reales tales como la suma y el producto.

Definición. 4.5.7. ***[Vargas, 2015, pág 152]*** *Sean $s, t \in \mathscr{C}_{Ord}$ con $\alpha = dom(s)$ y $\beta = dom(t)$. Definimos la suma $s + t \in \mathscr{C}_\alpha$ por componentes para cada γ:*

$$(s + t)_\gamma = \begin{cases} s_\gamma + t_\gamma, & \gamma < \text{mín}(\alpha, \beta) \\ s_\gamma, & \beta < \gamma < \alpha; \\ t_\gamma, & \alpha < \gamma < \beta; \end{cases} \tag{4.25}$$

Recordemos el siguiente resultado de Cantor que nos da una manera canónica de representar los ordinales:

Teorema 4.5.3. ***(Forma normal de Cantor-FNC).*** *Todo ordinal α se puede escribir de manera única en la forma*

$$\omega^{\beta_1} a_1 + \omega^{\beta_2} a_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} a_k \tag{4.26}$$

donde k y $a_1, \ldots, a_k$ son números naturales y $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k$ son números ordinales.

Usando esta representación se puede definir un producto en el modelo, que genealiza la construcción geométrica asociada a $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Definición. 4.5.8. ***[Vargas,2015, pág 152]*** *Sean α y β dos ordinales representados de la siguiente forma según su FNC:*

$$\alpha = \omega^{\alpha_1} a_1 + \omega^{\alpha_2} a_2 + \ldots + \omega^{\alpha_k} a_k, \tag{4.27}$$

$$\beta = \omega^{\beta_1} b_1 + \omega^{\beta_2} b_2 + \ldots + \omega^{\beta_k} b_l \tag{4.28}$$

Definimos el ordinal:

$$\alpha \oplus \beta = \omega^{\gamma_1} c_1 + \omega^{\gamma_2} c_2 + \ldots + \omega^{\gamma_k} c_m \tag{4.29}$$

donde los ordinales $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$ son todos los ordinales α_i y β_j de las representaciones α y β tomados en orden creciente y sin repeticiones, y los naturales c_n están definidos por:

$$c_n = \begin{cases} a_i + b_j, & \gamma_n = \alpha_i = \beta_j \\ a_i, & \gamma_n = \alpha_i \\ b_j, & \gamma_n = \beta_j \end{cases} \tag{4.30}$$

Definición. 4.5.9. ***[Vargas, 2015, pág 153]*** *Sean $s, t \in \mathscr{C}_{Ord}$ con $\alpha = dom(s)$ y $\beta = dom(t)$. Definimos el producto $p = s \odot t \in \mathscr{C}_{Ord}$ por componentes para cada $\gamma < \alpha \oplus \beta$:*

$$p_\gamma = \sum_{\substack{\sigma \oplus \tau = \gamma \\ \sigma < \alpha \\ \tau < \beta}} s_\sigma \cdot t_\tau \tag{4.31}$$

Notese que el producto $p = s \odot t$ pertence a $\mathscr{C}_{Ord}$ porque efectivamente cada p_γ es un número real.

***Ejemplo* 3.** *Considere* $r = (r_0, r_1, r_2)$ *y* $s = (s_0, s_1)$ *entonces*

$$r \odot s = (r_0 \cdot s_0, r_0 \cdot s_1 + r_1 \cdot s_0, r_2 \cdot s_0 + r_1 \cdot s_1, r_2 \cdot s_1) \tag{4.32}$$

Se puede observar que al definir la operación de potenciación, se tiene que al elevar a distintas potencias se consiguen distintos grados de infinitesimos. Es decir, dado ε un infinitesimal se tiene $\varepsilon \gg \varepsilon^2 \gg \varepsilon^3 \gg \ldots$ donde la relación $a \gg b$ indica que b es infinitésimo para a.

Esto último es evidente dado que al multiplicar un infinitésimo por otro se consigue un infinitésimo mucho más pequeño.

Teorema 4.5.4. ***[Vargas, 2015, pág 154]*** *Sean* $s, t, u \in \mathscr{C}_{Ord}$*. Entonces*

$$s \odot (t + u) = s \odot t + s \odot u. \tag{4.33}$$

Demostración. Tomemos $a, s, t, u \in \mathscr{C}_{Ord}$ con $dom(s) = \alpha, dom(t) = \beta$ y $dom(u) = \delta$, sin perdida de generalidad podemos suponer que $\beta \geq \delta$. Consideremos las sucesiones

$$a = s \odot (t + u) \tag{4.34}$$

$$b = s \odot t + s \odot u \tag{4.35}$$

y veamos que $a_\gamma = b_\gamma$ para todo $\gamma < \alpha \oplus \beta$.

Sea

$$a_\gamma = \sum_{\substack{\sigma \oplus \tau = \gamma \\ \sigma < \alpha \\ \tau < \beta}} s_\sigma \cdot (t + u)_\tau \tag{4.36}$$

Dado que $\gamma < \delta$ entonces por la definición de suma entre sucesiones esta expresión se convierte en:

$$a_\gamma = \sum_{\substack{\sigma \oplus \tau = \gamma \\ \sigma < \alpha \\ \tau < \beta}} s_\sigma \cdot (t_\tau + u_\tau) \tag{4.37}$$

Por distributividad entre reales y propiedades de las sumatorias obtenemos finalmente:

$$a_\gamma = \sum_{\substack{\sigma\oplus\tau=\gamma\\ \sigma<\alpha\\ \tau<\beta}} s_\sigma \cdot t_\tau + s_\sigma \cdot u_\tau = \sum_{\substack{\sigma\oplus\tau=\gamma\\ \sigma<\alpha\\ \tau<\beta}} s_\sigma \cdot t_\tau + \sum_{\substack{\sigma\oplus\tau=\gamma\\ \sigma<\alpha\\ \tau<\beta}} s_\sigma \cdot u_\tau = \sum_{\substack{\sigma\oplus\tau=\gamma\\ \sigma<\alpha\\ \tau<\beta}} s_\sigma \cdot t_\tau + \sum_{\substack{\sigma\oplus\tau=\gamma\\ \sigma<\alpha\\ \tau<\delta}} s_\sigma \cdot u_\tau \tag{4.38}$$

Pero esta ultima expresión es precisamente $(s\cdot t + s\cdot u)_\gamma = b_\gamma$. □

Dadas las propiedades anteriores, mediante el paso de clases de equivalencia se obtiene una estructura de anillo (Vargas, 2015).

Realizando una inspección en los axiomas de los números reales, es posible notar que en $\mathscr{C}_{Ord}$ no siempre se puede comparar una sucesión con otra mediante las relaciones usuales menor (<), mayor (>) e igual (=):

***Ejemplo* 4.** *Sean $r = (r_0, r_1)$ y $r' = (r'_0, r'_1)$ dos sucesiones en $\mathscr{C}_{Ord}$ representadas en la figura 3.4,*

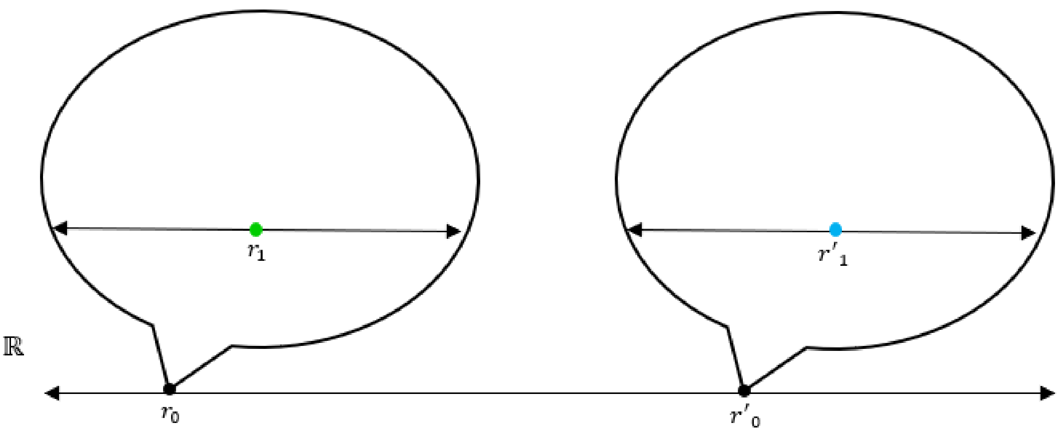

Figura 4.4: Comparación de las sucesiones $r = (r_0, r_1)$ y $r' = (r'_0, r'_1)$.

Es posible establecer una relación de orden entre los términos r_0 y r_1 de la sucesión r, y r'_0 y r'_1 de la sucesión r'. Sin embargo, si tomamos las sucesiones $r = (r_0, r_1, ...)$ y $r' = (r_0)$ del ejemplo 2, no es posible compararlas bajo las relaciones menor (<), mayor (>) e igual (=) dado que rEr'.

En este orden de ideas, el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ no cumple el axioma 6 de los números reales (ver sección 4.1.2.2).

Por otra parte, daremos las siguientes definiciones que nos serán útiles en el cápitulo 5 para poder postular el Teorema del valor intermedio para funciones continuas en $\mathscr{C}_\alpha$:

Definición. 4.5.10. *Dadas dos sucesiones $s, t \in \mathscr{C}_\alpha$, con $s <_\alpha t$, entonces el conjunto (s, t) se define como $(s, t) = \{x \in \mathscr{C}_\alpha : s <_\alpha x <_\alpha t\}$. Dicho conjunto recibe el nombre de intervalo abierto en $\mathscr{C}_\alpha$.*

Definición. 4.5.11. *Dadas dos sucesiones $s, t \in \mathscr{C}_\alpha$, con $s \leq_\alpha t$, entonces el conjunto $[s, t]$ se define como $[s, t] = \{x \in \mathscr{C}_\alpha : s \leq_\alpha x \leq_\alpha t\}$. Dicho conjunto recibe el nombre de intervalo cerrado en $\mathscr{C}_{Ord}$.*

4.6. Construcción del plano en $\mathscr{C}_{Ord}$

En (Vargas,En preparación) se estudia la existencia de tres formas posibles para definir un continuo λ-dimensional y para dar estas construcciones nos limitamos al caso bidimensional:

1. Haciendo una construcción análoga a la realizada en $\mathscr{C}_{Ord}$, utilizamos ahora elementos de $\mathbb{R}^2$ en vez de utilizar elementos de $\mathbb{R}$. Para entender mejor esta definición visualice las figuras 5.1 y 5.2; en primera instancia tenemos una primera aproximación al plano $\mathbb{R}^2$, después es posible observar que cada "punto" de $\mathbb{R}^2$ tiene en su interior una copia entera de $\mathbb{R}^2$ y así sucesivamente según el caso.

2. Por otra parte, es posible construir el conjunto de pares de elemento en $\mathscr{C}_\alpha$, es decir $(\mathscr{C}_\alpha)^2 = \mathscr{C}_\alpha \times \mathscr{C}_\alpha$, para luego tomar la unión de estos.

3. En última instancia, se pueden tomar todos los posibles pares ordenados de $\mathscr{C}_{Ord}$, es decir $(\mathscr{C}_{Ord})^2 = \mathscr{C}_{Ord} \times \mathscr{C}_{Ord}$.

Con base a estas construcciones se puede estipular el siguiente teorema:

Teorema 4.6.1. ***[Vargas, en preparación].*** *Las siguientes construcciones son isomorfas:*

1. $\left\langle \bigcup_{\alpha\in Ord}(\mathbb{R}^2), E \right\rangle$

2. $\left\langle \bigcup_{\alpha\in Ord}(\mathscr{C}_\alpha)^2, E \right\rangle$

3. $\left\langle (\mathscr{C}_{Ord})^2, E \right\rangle$

Capítulo 5

Funciones generalizadas en $\mathscr{C}_{Ord}$

A partir de las definiciones anteriores es posible construir funciones tal y como se hace para los números reales, además, se puede establecer la continuidad de las mismas por componentes:

Definición. 5.0.1. *Sea $s \in \mathscr{C}_{\leq\beta}$, definimos una función en $\mathscr{C}_{Ord}$ como la relación*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_{\leq\beta} & \rightarrow & \mathscr{C}_{Ord} \\ s & \rightarrow & f(s) \end{array} \tag{5.1}$$

***Ejemplo* 5.** *Sean $s = (s_0, s_1)$ y $f(s) = 2s \in \mathscr{C}_2$, entonces*

$$f(s) = 2s = 2(s_0, s_1) = (2s_0, 2s_1) = t \tag{5.2}$$

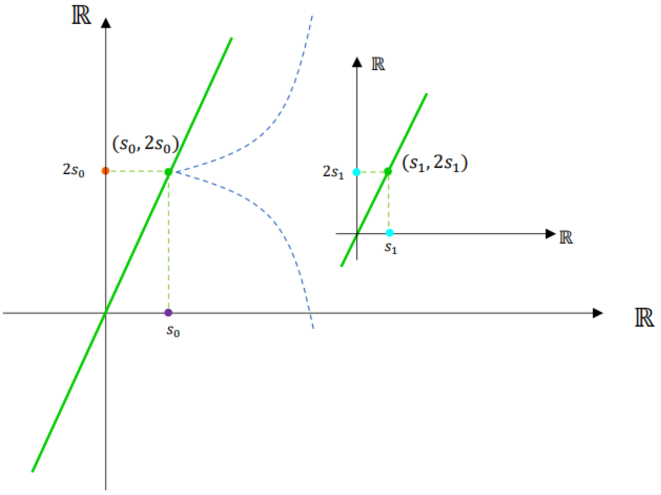

Figura 5.1: Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 5)

***Ejemplo* 6.** *Sea $s = (s_0, s_1, ...)$ y $f(s) = s^2 \in \mathscr{C}_\alpha$, entonces*

$$f(s) = s^2 = s \odot s = (s_0, s_1, ...) \odot (s_0, s_1, ...) = (s_0 \cdot s_0, s_0 \cdot s_1 + s_1 \cdot s_0, ...) = ({s_0}^2, 2s_0 \cdot s_1, ...) = t \quad (5.3)$$

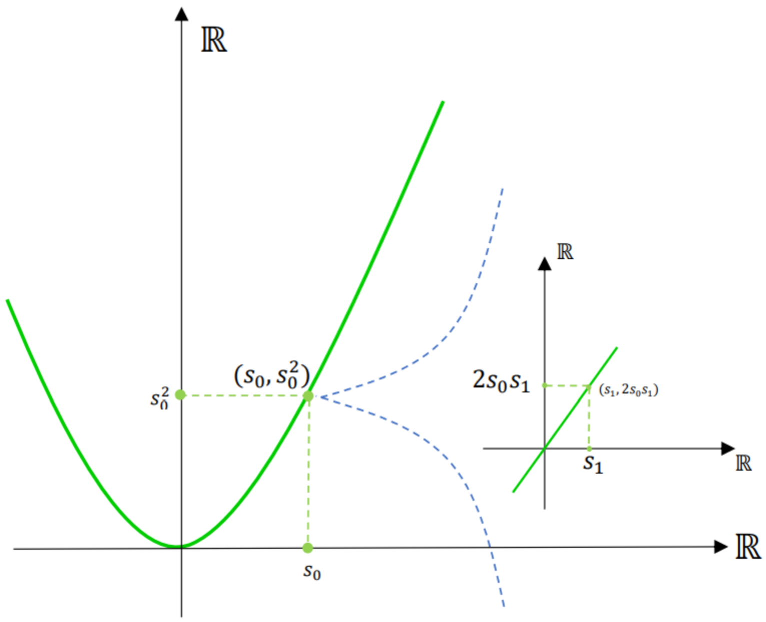

Figura 5.2: Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 6)

Se puede ver que se tiene la **micro-rectitud** que se mencionaba en SIA (ver sección 4.3.1) y, así mismo, se mantienen las características que Charles S. Peirce le atribuía al continuo (ver capítulo 4.4).

5.1. Coherencia, Estratificación y Continuidad:

Es posible generalizar y refinar la definición de continuidad de Cauchy mencionada en 4.1.2 teniendo en cuenta los distintos grados de infinitesimales. Así, los distintos micro niveles solo afectan a sus propios niveles o a los inferiores. Para visualizar mejor esta idea, se formalizará extendiendo el principio de Cauchy:

Definición. 5.1.1. ***[Vargas, por publicar].*** *$f : \mathscr{C}_{<\beta} \to \mathscr{C}_{Ord}$ es coherente si y solo si para todo $s \in \mathscr{C}_{\leq\beta}$, si $t \in \mathscr{M}_s \cap \mathscr{C}_{\leq\beta}$ entonces $f(t) \in \mathscr{M}_{f(s)}$. En otras palabras, si sEt entonces $f(s)Ef(t)$.*

Definición. 5.1.2. ***[Vargas, por publicar].*** *$f : \mathscr{C}_\beta \to \mathscr{C}_{Ord}$ es estratificada si y solo si, dado $s \in \mathscr{C}_{\leq\beta}$, es de la forma*

$$f(s) = f((s_1; s_2; ...; s_\alpha; ...)) = (f_1(s_1); f_2(s_2); ...; f_\alpha(s_\lambda)_{\lambda<\alpha}; ...) \tag{5.4}$$

***Ejemplo* 7.** *Las funciones de los ejemplos 5 y 6 son coherentes y estratificadas:*

En el ejemplo 5 $f(s) = (2s_0; 2s_1)$ es una función estratificada dado que su imagen en la componente 1 no depende de la componente 2. Además, $f(s)$ es coherente porque para todo $k \in \mathscr{M}_s \cap \mathscr{C}_2$, $f(k) \in \mathscr{M}_{f(s)}$.

Por otra parte, la función $f(s) = ({s_0}^2, 2s_0 \cdot s_1, ...)$ enunciada en el ejemplo 6 es una función estratificada porque su imagen en la componente $\lambda \leq \alpha$ no depende de niveles infinitesimales superiores. Igualmente, $f(s)$ es coherente porque para todo $m \in \mathscr{M}_s \cap \mathscr{C}_\alpha$, $f(m) \in \mathscr{M}_{f(s)}$.

***Ejemplo* 8.** *La función $f : \mathscr{C}_3 \to \mathscr{C}_3$ definida como $f(s) = f((s_0; s_1; s_2)) = (s_0 + s_1 + s_2; 0; 0)$ no es estratificada, pues su imagen en la primera componente depende de la segunda y la tercera componente.*

Definición. 5.1.3. ***[Vargas, por publicar].*** *$f : \mathscr{C}_{\leq\beta} \to \mathscr{C}_{Ord}$ es α-continua en $s \in \mathscr{C}_\alpha$, si para todo $\epsilon \in \mathscr{C}_\alpha$ positivo, hay un $\delta \in \mathscr{C}_\alpha$ positivo tal que $|s - t| < \delta$ entonces $|f(s) - f(t)| < \epsilon$. Se diría que f es α-continua, si y solo si es continua para todo $s \in \mathscr{C}_\alpha$. Se dirá que f es continua, si y solo si es α-continua para todo $\alpha \leq \beta$.*

De las definiciones anteriores se deduce que toda función continua es coherente.

***Ejemplo* 9.** *La función*

$$f((s_1; s_2)) = \begin{cases} (0;1) & si \quad s_1 > 0 \\ (0;0) & si \quad s_1 = 0 \\ (1;0) & si \quad s_1 < 0 \end{cases} \tag{5.5}$$

no es continua para $\alpha = 1$ pero si lo es para $\alpha = 2$, por lo tanto $f(s)$ no es continua.

***Ejemplo* 10.** *Las funciones del ejemplo 7 son continuas.*

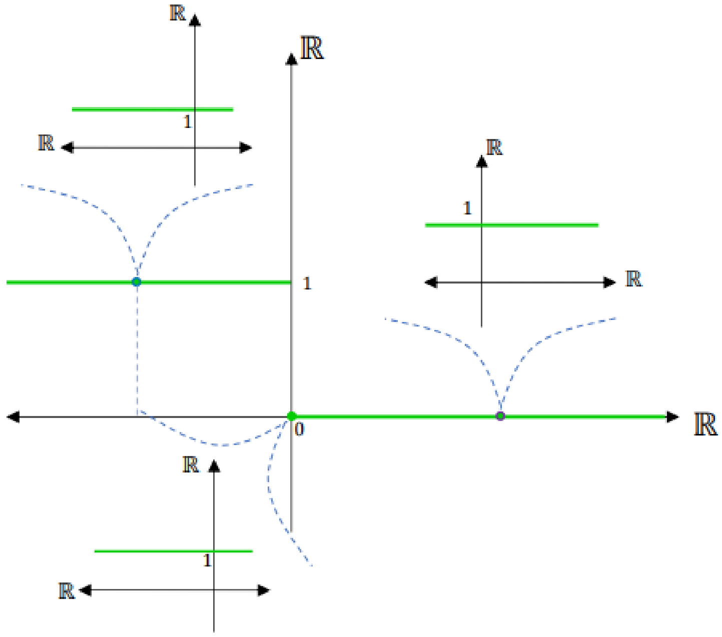

Figura 5.3: Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 9)

5.2. Microrectitud

Como se expuso en la definición 4.3.2, la microrectitud se refiere de manera informal a que lo que es usualmente conocido como punto realmente es una linea recta a nivel infinitesimal: este concepto será fundamental para entender las definición de derivada para el cálculo diferencial en $\mathscr{C}_{Ord}$.

En particular, para el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ se tienen varios niveles de microrrectitud; se puede abordar mejor esta idea con la siguiente definición:

Definición. 5.2.1. ***[Vargas, Por publicar].*** *Considere una funcion $f:\mathscr{C}_{\leq\beta}\to\mathscr{C}_{Ord}$ para algún ordinal β. Para un ordinal $\alpha<\beta$ diremos que f es micro-recta en el nivel $\alpha+1$ (o $\alpha+1$-MS por su sigla en inglés micro-straightness) si la función $\widetilde{f}=f|_{C_{\alpha+1}}:C_{\alpha+1}\to C_{Ord}$ es lineal en función de la $\alpha+1$-ésima componente, es decir, para $r_1,\dots,r_\alpha$ fijos, entonces*

$\widetilde{f}((r_1;\dots;r_\alpha;r_{\alpha+1}))=(\widetilde{f}_1((r_1;\dots;r_\alpha));\dots;\widetilde{f}_\alpha((r_1;\dots;r_\alpha));\widetilde{f}_{\alpha+1}((r_1;\dots;r_\alpha));\dots)$ donde $\widetilde{f}_{\alpha+1}((r_1;\dots;r_\alpha))=ar_{\alpha+1}+b$ con a y b que dependen solo de $(r_1,\dots,r_\alpha)$.

5.3. Cálculo diferencial

Para una función f de la forma $f : \mathscr{C}_{\leq 2} \to \mathscr{C}_{Ord}$, la derivada $f'(x)$ se define como la pendiente de la función lineal proporcionada por la microrrecta.

***Ejemplo* 11.** *Considere $f : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_{Ord}$ tal que*

$$f(s) = f((s_1; s_2)) = (f_1(s_1); f_2((s_1; s_2); \ldots) = (f(s_1); a \cdot s_2 + b; \ldots) \tag{5.6}$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $f'(s_1) = a$.

***Ejemplo* 12.** *La función del ejemplo 9 es diferenciable a pesar de que no es continua, pues para cada real se tiene una microrecta.*

Gracias al ejemplo 9 es posible observar que si una función f es diferenciable en un punto, no necesariamente debe ser continua en dicho punto. Esto difiere con las definiciones que se tenian en el análisis clásico porque una característica que se tenia en el mismo era que toda función diferenciable era continua.

Por otra parte, se cumplen las reglas de derivación que se tienen en $\mathscr{R}$ y se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema 5.3.1. ***[Vargas, Por publicar].*** *Sean $f : \mathscr{C}_\beta \to \mathscr{C}_{Ord}$ y $g : \mathscr{C}_{\leq\beta} \to \mathscr{C}_{Ord}$ dos funciones diferenciables. Entonces tenemos las siguientes reglas:*

1. $(f + g)' = f' + g'$
2. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$
3. $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
5. $(f \circ g)' = (g' \circ f) \cdot f'$

Capítulo 6

Teoremas de continuidad en $\mathscr{C}_{Ord}$

6.1. Teorema del valor intermedio para funciones α-continuas:

Partiendo del teorema del valor intermedio para funciones continuas en $\mathbb{R}$ sería natural pensar que se tiene el siguiente enunciado:

Enunciado 6.1.1. *Supongamos que $f : \mathscr{C}_{\leq\beta} \to \mathscr{C}_{Ord}$ es α-continua en un intervalo cerrado I de $\mathscr{C}_\alpha$. Supongamos que existen dos sucesiones s y t en I tales que $dom(s) = dom(t) = \alpha$ y $f(s) \neq f(t)$. Entonces f toma todos los valores de $\mathscr{C}_\alpha$ comprendidos entre $f(s)$ y $f(t)$ en el intervalo (s,t).*

Sin embargo no se tiene en general para sucesiones arbitrarias s y t. Veamos el siguiente contra ejemplo:

***Ejemplo* 13.** *Sea $f(s) : \mathscr{C}_{\leq 2} \to \mathscr{C}_2$ definida en $\mathscr{C}_1$ como*

$$f(s) = f((s_1)) = s_1 \tag{6.1}$$

y en $\mathscr{C}_2$ como

$$f(s) = \begin{cases} (s_1;1) & si \quad s_1 \geq 0 \\ (s_1;2) & si \quad s_1 < 0 \end{cases} \tag{6.2}$$

la función es continua porque en ambos niveles ($\alpha = 1$ y $\alpha = 2$) es continua. Por otra parte, sean $s = (-7;10)$ y $t = (5;3)$ luego $f(s) = (-7;2)$ y $f(t) = (5;1)$. Sin embargo, no existe ninguna sucesión $m = (m_1;m_2) \in (s,t)$ tal que $1 < f(m_2) < 2$. Por ejemplo el valor $(3;3/2)$ está entre $f(s)$ y $f(t)$ y sin embargo no tiene una pre-imagen, luego f no cumple el enunciado postulado anteriormente.

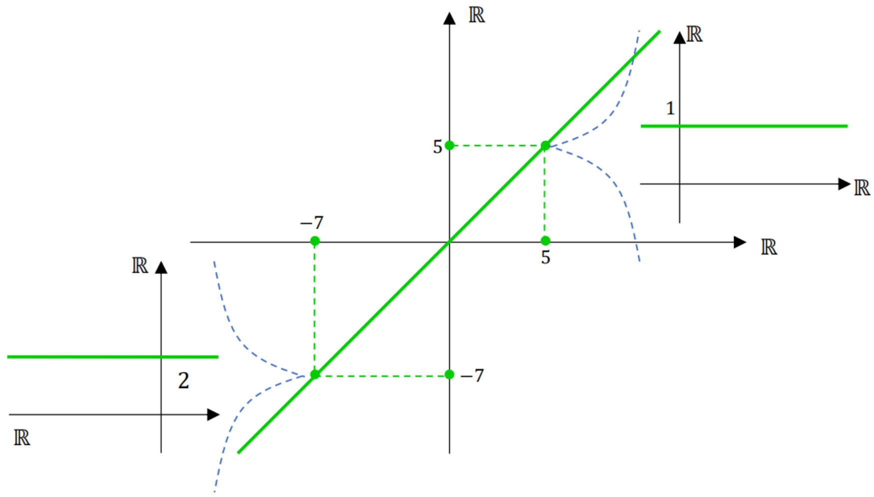

Figura 6.1: Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 13)

Sin embargo, es posible establecer una versión del teorema reduciendo el problema a monadas y no a intervalos:

Teorema 6.1.1. ***(Teorema del valor intermedio para funciones continuas en $\mathscr{C}_{Ord}$).*** *Sea $f : \mathscr{C}_{<\beta} \to \mathscr{C}_{Ord}$. Sean s y t tales que para todo $\lambda < \alpha$, $s_\lambda = t_\lambda$ y $s_\alpha \neq t_\alpha$ y supongamos que f es α-continua en el intervalo cerrado $[s,t]$. Entonces f toma todos los valores en $\mathscr{C}_\alpha$ comprendidos entre $f(s_\alpha)$ y $f(t_\alpha)$.*

Demostración. Para mostrar este teorema podemos usar el teorema del valor intermedio para funciones continuas en $\mathbb{R}$ (Si consideramos el caso $\alpha = 1$ el resultado es inmediato). Dado que $s_\lambda = t_\lambda$, f depende unicamente de la α-ésima componente, por lo tanto f se puede ver como una función real en el intervalo $[s,t]$ y se puede aplicar el teorema 4.1.2.

□

6.2. Teorema de Rolle

El teorema de Rolle que conocemos del análisis real clásico (ver teorema 4.1.3) no se cumple en $\mathscr{C}_{Ord}$, asumiendo la definición de derivada que tenemos para el modelo; esto se puede evidenciar en el siguiente ejemplo:

***Ejemplo* 14.** *La función $f : C_5 \to \mathscr{C}_5$ definida como*

$$f(s) = f((s_0; s_1; s_2; s_3; s_4)) = (-(s_0)^2 + 1; s_1; s_2; s_3; s_4) \tag{6.3}$$

no cumple el teorema de Rolle que se plantea en el análisis real clásico, pues de acuerdo con la definición de derivada dada en 5.3, la primera derivada de $f(s)$ *es igual a* 1 *para todo* $s \in \mathscr{C}_{\leq\beta}$*, de manera que si* $f(k) = f(t)$ *para algún* $k, t \in \mathscr{C}_\alpha$*, no existe ninguna sucesión* $u \in (k, t)$ *tal que* $f'(u) = 0$.

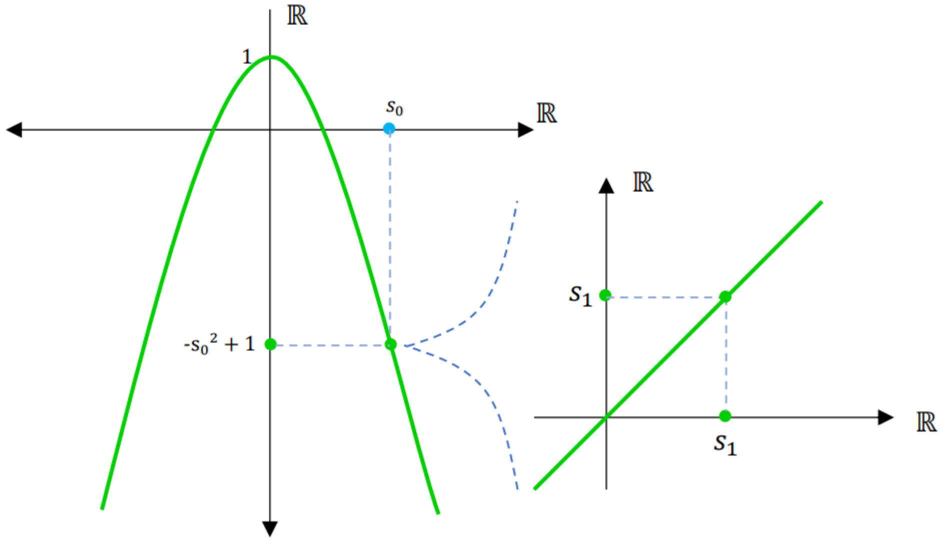

Figura 6.2: Gráfica de $f(s)$ (Ejemplo 14)

A pesar de que para algunas funciones no se cumple el teorema de Rolle, para las funciones elementales tales como los polinomios si es válido. Veamos como ilustración el siguiente ejemplo con el polinomio $p(x) = x^3 + x^2 + 1$:

***Ejemplo* 15.** *Sea* $f : \mathscr{C}_2 \to \mathscr{C}_2$ *definida como*

$$f(s) = (s_0; s_1)^3 + (s_0; s_1)^2 + (1;0) = ({s_0}^2; 2s_0s_1) \odot (s_0; s_1) + ({s_0}^2; 2s_0s_1) + (1;0) = \tag{6.4}$$

$$({s_0}^3; 3{s_0}^2 s_1) + ({s_0}^2 + 1; 2s_0s_1) = ({s_0}^3 + {s_0}^2 + 1; 3{s_0}^2 s_1 + 2s_0s_1) = ({s_0}^3 + {s_0}^2 + 1; (3{s_0}^2 + 2s_0)s_1) \tag{6.5}$$

en el intervalo $[s, t]$ *con* $s = (-1;0)$ *y* $t = (0;-1)$. *Por otra parte, obsérvese que* f *es microrecta en la segunda componente y que por lo tanto su derivada corresponde al coeficiente* *de* s_1 *en la segunda componente, es decir* $3{s_0}^2 + 2s_0$. *Esto corresponde al resultado que se obtiene usualmente en el cálculo usando otros métodos, o sea* $f'(x) = 3x^2 + 2x$. *Veamos que sí se cumplen las hipotesis:*

1. *f es continua en* $[s,t]$ *porque para todo* $k \in [s,t]$ *es 1-continua y 2-continua.*

2. *f es derivable para todo* $k \in (s,t)$.

3. $f(s) = f((-1;0)) = (1;0) = f((0;-1)) = f(t)$

Para ver que se cumple el teorema debemos buscar un $c \in (-1,0)$ *tal que* $f'(c) = 0$. *En efecto, sea* $c = -2/3 \in (-1,0)$ *entonces* $f'(c) = f'(-2/3) = 3(-2/3)^2 s_1 + 2(-2/3)s_1 = 0s_1 = 0$.

Capítulo 7

Conclusiones

Con base en lo desarrollado en los capítulos anteriores se puede concluir que existen distintas alternativas para estudiar el cálculo, una de ellas es el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ que rescata las ideas Peirceanas del continuo junto con algunas nociones del análisis infinitesimal suave y el análisis no estándar.

Algunos teoremas del análisis real para funciones continuas tales como el teorema de Rolle no son compatibles en el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$, por lo tanto es necesario hacer nuevas formulaciones para los teoremas que no se preserven en el modelo tal y como se hizo para el Teorema del valor intermedio para funciones continuas.

Por otra parte, se presentan los siguientes problemas abiertos para que en trabajos posteriores se les pueda dar solución:

1. ¿Cómo se puede interpretar de forma geométrica la n-ésima componente de una función de α componentes ($\alpha \geq 3$) en $\mathscr{C}_{Ord}$?

2. ¿Existen versiones más generales del teorema de Rolle en $\mathscr{C}_{Ord}$ más allá de las funciones elementales?

3. ¿En que contextos se puede aplicar el modelo $\mathscr{C}_{Ord}$ para abordar conceptos relacionados con la continuidad en las ciencias naturales?

Referencias

Apostol, Tom M.: *Análisis Matemático*, 2001, ISBN 84-291-5002-1 (ESPAÑA).

Bell, John Lane: *A primer of infinitesimal analysis.* Cambridge University Press Cambridge, 2008.

Goldblatt, Robert: *Lectures on the Hyperreals, An introduction to Nonstandard Analysis.* Springer edición, 1998, ISBN 9781626239777.

H. Jerome Keisler: *Elementary calculus an infinitesimal approach.* 2005.

Kanamori, Akihiro: *Cantor and Continuity.* En *The History of Continua*, páginas 219–254. 2021, ISBN 9780198809647.

González, Kemel George: *Origen, destierro y renacimiento de los infinitesimales.* páginas 29–36, 2012.

Robinson, Abraham: *Non-standard analysis.* North-Holland, 1966.

Peirce, Charles S.: *The Conception of Time Essential in Logic.* 1873.

Vargas, Francisco: *Modelos y variaciones sobre las ideas peirceanas del continuo.* páginas 139–156, 2015.

Vargas, Francisco: *Advances on Pierce's Continuum.* Por aparecer en: Zalamea, F.(ed) Advances in Peirce Mathematics.

Vargas, Francisco y Matthew E. Moore: *The Peircean Continuum.* 2020, ISBN 9780198809647.

Zalamea, Fernando: *Peirce's Logic of Continuity: A conceptual and Mathematical approach.* 2012.